

Ghiacci Erranti: Glaciologia Matematica, Equazioni di Flusso per Ice Sheets e Modellazione delle Ere Glaciali

Fondamenti della Dinamica del Ghiaccio e Reologia

Le calotte polari e i ghiacciai rappresentano archivi climatici di straordinaria importanza e costituiscono elementi dinamici del sistema Terra la cui evoluzione è governata da complesse leggi fisico-matematiche. Il ghiaccio, apparentemente statico nelle sue manifestazioni macroscopiche, è in realtà un fluido che scorre su scale temporali geologiche, deformandosi sotto l'azione del proprio peso secondo leggi costitutive profondamente non lineari. La comprensione quantitativa di questi fenomeni richiede un approccio interdisciplinare che integra meccanica dei continui, termodinamica, fisica dei materiali e modellazione numerica.

La glaciologia matematica moderna si pone l'obiettivo di descrivere l'evoluzione delle masse glaciali attraverso sistemi di equazioni differenziali alle derivate parziali che accoppiano la conservazione della massa, della quantità di moto e dell'energia. Questi sistemi presentano caratteristiche peculiari che li rendono particolarmente sfidanti dal punto di vista matematico e computazionale: la forte non linearità delle leggi costitutive, la presenza di superfici libere in evoluzione, le transizioni di fase, i fenomeni di contatto e attrito basale, e l'accoppiamento con altri componenti del sistema climatico.

Il Ghiaccio come Fluido Non-Newtoniano

Il comportamento meccanico del ghiaccio policristallino sotto stress è radicalmente diverso da quello dei fluidi ordinari. A differenza dei fluidi newtoniani, per i quali esiste una relazione lineare tra lo stress applicato e il tasso di deformazione (strain rate), il ghiaccio manifesta una risposta fortemente non lineare che lo classifica come fluido non-newtoniano con proprietà di shear-thinning.

La struttura cristallina del ghiaccio Ih, la forma stabile del ghiaccio alle condizioni di pressione e temperatura tipiche delle calotte terrestri, è caratterizzata da un reticolo esagonale in cui le molecole d'acqua sono legate da ponti idrogeno. Sotto l'azione di uno stress deviatorico, questa struttura può deformarsi attraverso diversi meccanismi microscopici: lo scorrimento basale dei piani cristallini, la formazione e propagazione di difetti reticolari, la rotazione e il riorientamento dei grani cristallini, e il processo di ricristallizzazione dinamica.

La complessità di questi processi microscopici trova una formulazione fenomenologica nella legge di Glen, che rappresenta la relazione costitutiva fondamentale della glaciologia. Questa legge empirica, proposta da John W. Glen negli anni Cinquanta del secolo scorso sulla base di estensivi esperimenti di laboratorio, descrive la relazione tra il tensore del tasso di deformazione e il tensore degli stress attraverso una legge di potenza non lineare.

La Legge di Glen: Formulazione Matematica

La forma generale della legge di Glen per un fluido incompressibile può essere espressa attraverso la relazione:

$$\dot{\epsilon} = A \tau^n$$

dove $\dot{\epsilon}$ rappresenta il tasso di deformazione (strain rate), τ denota lo stress efficace (secondo invariante del tensore deviatorico degli stress), n è l'esponente di flusso, e A è il parametro di flusso che dipende dalla temperatura.

Più precisamente, considerando il tensore completo degli stress σ_{ij} , possiamo decomporlo nella parte isotropa (pressione) e nella parte deviatoria τ_{ij} :

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij}$$

dove p è la pressione idrostatica e δ_{ij} è il delta di Kronecker. Il tensore del tasso di deformazione $\dot{\epsilon}_{ij}$ è definito in termini del gradiente di velocità:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = (1/2)(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$$

La legge di Glen stabilisce una relazione costitutiva tra questi tensori nella forma:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = A \tau_e^{n-1} \tau_{ij}$$

dove τ_e rappresenta lo stress efficace di von Mises, definito come:

$$\tau_e = \sqrt{((1/2) \sum_i \tau_{ij}^2)} = \sqrt{((1/2) \tau_{ij} \tau_{ij})}$$

utilizzando la convenzione di somma sugli indici ripetuti.

L'esponente n assume tipicamente il valore $n \approx 3$, determinato empiricamente attraverso una vasta gamma di esperimenti di laboratorio condotti su campioni di ghiaccio policristallino sottoposti a diverse condizioni di stress e temperatura. Questo valore non è universale e può variare leggermente (tipicamente tra 2,5 e 4,0) in funzione delle condizioni specifiche, della storia termo-meccanica del materiale, della dimensione dei grani, del contenuto di impurità e dell'orientazione cristallografica preferenziale.

Dipendenza dalla Temperatura: L'Equazione di Arrhenius

Il parametro di flusso A non è una costante, ma dipende fortemente dalla temperatura attraverso una relazione di tipo Arrhenius, che riflette la natura termicamente attivata dei processi di deformazione a livello cristallino:

$$A(T) = A_0 \exp(-Q/(RT))$$

dove A_0 è un fattore pre-esponenziale, Q rappresenta l'energia di attivazione per il processo di creep del ghiaccio (tipicamente $Q \approx 60$ kJ/mol per temperature inferiori a -10°C e $Q \approx 115$ kJ/mol per temperature superiori, riflettendo un cambio nel meccanismo dominante di deformazione), R è la costante universale dei gas ($R = 8,314$ J/(mol·K)), e T è la temperatura assoluta in Kelvin.

Questa forte dipendenza dalla temperatura ha conseguenze profonde per la dinamica delle calotte glaciali. Un incremento di temperatura di soli 10°C può aumentare il parametro A di un fattore superiore a 10, rendendo il ghiaccio drasticamente più fluido. Nelle regioni profonde delle calotte, dove la temperatura si avvicina al punto di fusione per effetto della pressione di sovraccarico e del calore geotermico, il ghiaccio è significativamente più deformabile rispetto agli strati superficiali freddi. Questo gradiente verticale di viscosità ha implicazioni fondamentali per il profilo di velocità attraverso lo spessore della calotta.

La temperatura stessa all'interno della calotta è determinata da un'equazione di bilancio energetico che accoppia conduzione termica, avvezione del calore da parte del ghiaccio in movimento, dissipazione viscosa (strain heating) e calore geotermico basale. Questo accoppiamento termo-meccanico rende il sistema profondamente non lineare e introduce fenomeni di feedback positivo: il riscaldamento indotto dalla deformazione aumenta la fluidità del ghiaccio, che a sua volta può incrementare la velocità di deformazione e quindi la produzione di calore.

Viscosità Effettiva e Comportamento Shear-Thinning

Sebbene il ghiaccio non sia un fluido newtoniano, è possibile definire una viscosità effettiva η che mette in relazione lo stress e il tasso di deformazione. Per un fluido che obbedisce alla legge di Glen, questa viscosità effettiva assume la forma:

$$\eta = \tau_e / (2\dot{\epsilon}_e)$$

dove $\dot{\epsilon}_e$ è il tasso di deformazione efficace, definito analogamente allo stress efficace. Sostituendo la legge di Glen, otteniamo:

$$\eta = (2A)^{-1/n} \dot{\epsilon}_e^{(1-n)/n}$$

oppure, in termini dello stress:

$$\eta = (1/2) A^{-1/n} \tau_e^{(1-n)/n}$$

Questa relazione rivela la caratteristica fondamentale del comportamento shear-thinning del ghiaccio. Poiché $n > 1$ (tipicamente $n \approx 3$), l'esponente $(1-n)/n$ è negativo, il che implica che la viscosità effettiva diminuisce all'aumentare del tasso di deformazione. In altre parole, il ghiaccio diventa progressivamente più fluido quando viene sollecitato più intensamente.

Per $n = 3$, la relazione si semplifica in:

$$\eta = (2A)^{-1/3} \dot{\epsilon}_e^{-2/3}$$

mostrando che la viscosità è inversamente proporzionale alla potenza due terzi del tasso di deformazione. Questo comportamento contrasta nettamente con i fluidi newtoniani ($n = 1$), per i quali la viscosità è indipendente dal tasso di deformazione, e ha conseguenze importanti per la dinamica del flusso.

Il carattere shear-thinning implica che le regioni dove lo stress è maggiore (ad esempio, in prossimità di asperità del letto roccioso, ai margini della calotta, o nelle zone di convergenza del flusso) diventeranno preferenzialmente più fluide, tendendo a concentrare ulteriormente la deformazione. Questo crea zone di taglio localizzate (shear margins) dove la maggior parte della deformazione è confinata in bande relativamente strette, fenomeno osservato nelle ice streams antartiche come il Pine Island Glacier o il Thwaites Glacier.

Formulazione Tensoriale Completa

Per applicazioni avanzate di modellazione, è necessario considerare la forma tensoriale completa della legge costitutiva. Il tensore completo degli stress è composto dalla pressione idrostatica e dalla parte deviatoria:

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij}$$

La condizione di incomprimibilità del ghiaccio (valida con eccellente approssimazione alle condizioni glaciologiche, eccetto che in prossimità immediata della superficie dove possono esistere pori riempiti d'aria) si esprime come:

$$\partial u_i / \partial x_i = 0$$

ovvero la traccia del tensore del tasso di deformazione è nulla:

$$\epsilon_{ii} = 0$$

La legge di Glen in forma tensoriale diventa:

$$\tau_{ij} = 2\eta \epsilon_{ij}$$

dove la viscosità effettiva η dipende dal secondo invariante del tensore del tasso di deformazione:

$$\eta = (1/2) A^{-1/n} (\epsilon_{ij} \epsilon_{ij})^{(1-n)/(2n)}$$

Questa formulazione completa è necessaria quando si risolve il sistema completo delle equazioni di Stokes per il flusso del ghiaccio, particolarmente in situazioni tridimensionali complesse dove le approssimazioni semplificate (come la shallow ice approximation discussa successivamente) non sono applicabili.

Variazioni della Legge di Glen e Raffinamenti

Negli ultimi decenni, numerosi raffinamenti della legge di Glen classica sono stati proposti per catturare fenomeni specifici osservati sperimentalmente. Tra questi:

La **legge di Glen-Steinemann** introduce una dipendenza esplicita dalla dimensione dei grani cristallini, poiché la ricristallizzazione dinamica influenza la reologia del ghiaccio. Grani più piccoli favoriscono lo scorrimento ai bordi dei grani (grain boundary sliding), mentre grani più grandi facilitano i meccanismi di deformazione intracristallina.

La **legge di Glen modificata per l'anisotropia** tiene conto del fatto che il ghiaccio policristallino può sviluppare una orientazione cristallografica preferenziale (fabric) sotto deformazione prolungata. I cristalli di ghiaccio Ih hanno un asse di simmetria esagonale (asse c) lungo il quale la deformazione è molto più difficile rispetto ai piani basali perpendicolari. Quando i cristalli si allineano in risposta a un campo di stress persistente, la massa di ghiaccio può diventare fortemente anisotropa, con viscosità differenti in direzioni diverse. Questo fenomeno è particolarmente rilevante nelle regioni profonde delle calotte, dove il ghiaccio ha subito una lunga storia di deformazione.

La **legge composita di Goldsby-Kohlstedt** riconosce che diversi meccanismi di deformazione operano simultaneamente e in regime di competizione. A basse tensioni e alte temperature domina il creep diffusionale (diffusion creep), mentre a tensioni più elevate prevale il creep per dislocazioni (dislocation creep). A tensioni molto elevate possono attivarsi meccanismi di frattura fragile. La legge composita somma i contributi dei diversi meccanismi:

$$\dot{\epsilon}_{\text{totale}} = \dot{\epsilon}_{\text{diffusion}} + \dot{\epsilon}_{\text{dislocation}} + \dot{\epsilon}_{\text{basal-slip}} + \dots$$

Ciascun termine ha la propria dipendenza da stress, temperatura e dimensione dei grani.

Validazione Sperimentale e Limiti di Applicabilità

La legge di Glen è stata validata attraverso decenni di esperimenti di laboratorio condotti su campioni di ghiaccio naturale e sintetico sottoposti a diverse condizioni di carico. Gli esperimenti tipicamente coinvolgono prove di compressione uniassiale, compressione triassiale, torsione, o combinazioni di questi, con controllo preciso della temperatura e misurazione continua dello strain rate.

I risultati mostrano che per tassi di deformazione nell'intervallo $10^{-14} \text{ s}^{-1} < \dot{\epsilon} < 10^{-9} \text{ s}^{-1}$ (tipici delle calotte glaciali, corrispondenti a deformazioni da circa 0,3% per milione di anni a 3% per anno) e per temperature tra -50°C e il punto di fusione, la legge con $n \approx 3$ fornisce una descrizione ragionevolmente accurata.

Tuttavia, esistono limiti di applicabilità. A tassi di deformazione molto bassi ($\dot{\epsilon} < 10^{-14} \text{ s}^{-1}$), la legge tende a sovrastimare la resistenza del ghiaccio. A tassi molto elevati ($\dot{\epsilon} > 10^{-8} \text{ s}^{-1}$), che possono verificarsi in zone di taglio concentrate o durante eventi di frattura, possono diventare dominanti meccanismi fragili non catturati dalla legge di Glen.

Inoltre, la presenza di impurità (sali, polveri, ceneri vulcaniche) può alterare significativamente la reologia. Le impurità solubili possono segregare ai bordi dei grani e facilitare lo scorrimento intergranulare, riducendo la viscosità effettiva. Questo è particolarmente rilevante per il ghiaccio nelle regioni profonde delle calotte, dove la concentrazione di impurità aumenta per compattazione e dove il ghiaccio più antico può contenere alte concentrazioni di aerosol depositati durante periodi glaciali.

La presenza di acqua liquida, anche in quantità minime, ha un effetto drammatico sulla reologia. Il ghiaccio temperato (cioè alla temperatura di fusione alla pressione locale) può contenere microscopiche vene e film di acqua liquida ai bordi dei grani, che agiscono come lubrificante riducendo enormemente la resistenza allo scorrimento intergranulare. Questo rende il ghiaccio temperato molto più fluido del ghiaccio freddo alla stessa tensione.

Implicazioni per la Modellazione Numerica

La non linearità della legge di Glen pone sfide significative per la modellazione numerica del flusso glaciale. Il sistema di equazioni risultante è fortemente non lineare e richiede tecniche iterative per la soluzione. Metodi comuni includono:

1. **Linearizzazione iterativa (Picard):** la viscosità viene aggiornata iterativamente utilizzando il campo di velocità della iterazione precedente fino a convergenza.
2. **Metodi di Newton-Raphson:** forniscono convergenza più rapida ma richiedono il calcolo della matrice Jacobiana del sistema, computazionalmente più oneroso.
3. **Metodi di continuazione:** partendo da un problema linearizzato ($n = 1$) e aumentando gradualmente l'esponente fino a $n = 3$, aiutano a garantire la convergenza in casi difficili.

La forte variazione spaziale della viscosità effettiva (che può variare di diversi ordini di grandezza all'interno di una calotta a causa dei gradienti termici e delle variazioni nel tasso di deformazione) richiede strategie numeriche robuste e tecniche di preconditionamento avanzate per i solutori lineari. La discretizzazione spaziale deve essere sufficientemente fine nelle regioni di elevato gradiente di velocità (shear margins, grounding line) ma può essere più grossolana nelle regioni centrali dove il flusso è relativamente uniforme, portando all'utilizzo di mesh adattive.

La scelta dell'esponente n ha anche implicazioni per la stabilità numerica: valori più elevati di n introducono maggiore non linearità e possono richiedere time steps più piccoli nelle simulazioni transienti per mantenere la stabilità numerica.

La Shallow Ice Approximation e le Equazioni del Flusso

Equazioni Fondamentali del Flusso Glaciale

Il moto del ghiaccio all'interno di una calotta polare è governato dalle equazioni di conservazione della meccanica dei continui. Per un fluido incomprimibile come il ghiaccio glaciale, queste equazioni consistono nell'equazione di continuità (conservazione della massa) e nell'equazione di conservazione della quantità di moto.

L'equazione di continuità si scrive:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

dove u è il vettore velocità tridimensionale $u = (u, v, w)$ nelle direzioni cartesiane (x, y, z) .

L'equazione di conservazione della quantità di moto, nell'approssimazione quasi-statica (valida quando i termini inerziali sono trascurabili rispetto agli stress viscosi, condizione ampiamente verificata per il flusso glaciale dove i numeri di Reynolds sono estremamente bassi), si riduce all'equazione di Stokes:

$$\nabla \cdot \sigma + \rho g = 0$$

dove σ è il tensore degli stress, ρ è la densità del ghiaccio (approssimativamente costante a $\rho \approx 917 \text{ kg/m}^3$), e g è il vettore accelerazione di gravità $g = (0, 0, -g)$ con $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$.

Espandendo questa equazione in componenti e sostituendo la decomposizione del tensore degli stress in parte idrostatica e deviatoria, si ottiene:

$$-\partial p / \partial x + \partial \tau_{xx} / \partial x + \partial \tau_{xy} / \partial y + \partial \tau_{xu} / \partial z = 0$$

$$-\partial p / \partial y + \partial \tau_{yx} / \partial x + \partial \tau_{yy} / \partial y + \partial \tau_{yu} / \partial z = 0$$

$$-\partial p / \partial z + \partial \tau_{ux} / \partial x + \partial \tau_{uy} / \partial y + \partial \tau_{uu} / \partial z - \rho g = 0$$

Queste tre equazioni, insieme all'equazione di continuità e alla legge costitutiva di Glen che lega gli stress ai tassi di deformazione, formano un sistema chiuso per le quattro incognite scalari (pressione e tre componenti di velocità).

La Shallow Ice Approximation: Derivazione e Giustificazione

Le equazioni complete di Stokes, pur essendo esatte (nell'ambito dell'approssimazione quasi-statica), sono computazionalmente molto onerose da risolvere numericamente su domini tridimensionali delle dimensioni tipiche delle calotte glaciali (migliaia di chilometri in estensione orizzontale, alcuni chilometri in spessore). Fortunatamente, per una vasta classe di situazioni glaciologiche, la particolare geometria del problema permette di introdurre semplificazioni che riducono drasticamente la complessità matematica e computazionale.

La **Shallow Ice Approximation** (SIA) si basa sul riconoscimento che le calotte glaciali hanno un aspect ratio molto piccolo, definito come il rapporto tra lo spessore caratteristico H e l'estensione orizzontale caratteristica L :

$$\varepsilon = H/L \ll 1$$

Per le grandi calotte come quella antartica o groenlandese, tipicamente $H \approx 2\text{-}3 \text{ km}$ e $L \approx 1000\text{-}2000 \text{ km}$, quindi $\varepsilon \approx 10^{-3}$, decisamente molto minore di uno.

Questa separazione di scale permette di sviluppare un'analisi asintotica del sistema di equazioni, espandendo le variabili in serie di potenze di ε e trattenendo solo i termini dominanti. L'analisi dettagliata (originariamente sviluppata da Hutter e collaboratori negli anni Ottanta) mostra che, al primo ordine in ε , gli stress dominanti nel bilancio della quantità di moto sono:

1. La pressione idrostatica verticale

2. Gli stress di taglio verticale τ_{xu} e τ_{yu}

Mentre possono essere trascurati (in prima approssimazione):

1. Gli stress longitudinali τ_{xx} e τ_{yy}
2. Gli stress trasversali τ_{xy}
3. I gradienti orizzontali di pressione diversi da quelli associati alla superficie libera

La giustificazione fisica di questa approssimazione è intuitiva: in una calotta con geometria "piatta" (nel senso di aspect ratio piccolo), il peso del ghiaccio sovrastante genera una pressione che aumenta quasi linearmente con la profondità, mentre il flusso avviene principalmente per scorrimento di strati orizzontali gli uni sugli altri (shear flow), con gli stress di taglio verticali che bilanciano la componente della gravità lungo la superficie inclinata.

Profilo di Stress nella SIA

Consideriamo un sistema di coordinate cartesiane dove x e y sono orizzontali e z è verticale, con $z = 0$ al livello del mare. Definiamo:

- $b(x,y)$ = elevazione del letto roccioso (bedrock)
- $h(x,y,t)$ = spessore del ghiaccio
- $s(x,y,t) = h + b$ = elevazione della superficie superiore (surface)

Nella SIA, l'equazione verticale dell'equilibrio si riduce a:

$$\partial p / \partial z = -\rho g$$

che integrata dalla superficie (dove la pressione atmosferica è trascurabile rispetto alle pressioni glaciostatiche) fornisce la distribuzione di pressione idrostatica:

$$p(x,y,z,t) = \rho g(s - z)$$

Questa è semplicemente la pressione dovuta al peso della colonna di ghiaccio sovrastante il punto considerato.

Le equazioni orizzontali dell'equilibrio, trascurando i termini di ordine superiore, si riducono a:

$$\partial \tau_{xu} / \partial z = \rho g \partial s / \partial x$$

$$\partial \tau_{yu} / \partial z = \rho g \partial s / \partial y$$

Queste equazioni hanno una semplice interpretazione fisica: il gradiente verticale dello stress di taglio è bilanciato dalla componente orizzontale della forza gravitazionale per unità di volume. Notare che il gradiente della superficie s (non dello spessore h) determina la driving stress.

Integrando queste equazioni dalla quota z (dove lo stress è incognito) fino alla superficie libera $z = s$ (dove lo stress di taglio deve annullarsi, poiché l'aria non esercita trazione tangenziale apprezzabile), otteniamo:

$$\tau_{xu}(x,y,z,t) = \rho g(s-z) \partial s / \partial x = \rho g(s-z) \partial h / \partial x + \rho g(s-z) \partial b / \partial x$$

$$\tau_{yu}(x,y,z,t) = \rho g(s-z) \partial s / \partial y = \rho g(s-z) \partial h / \partial y + \rho g(s-z) \partial b / \partial y$$

Per una calotta su un letto piatto o con pendenze molto più piccole rispetto alla superficie, il secondo termine è trascurabile e:

$$\tau_{xu} \approx \rho g(s-z) \partial h / \partial x$$

che spesso viene scritta in termini della profondità sotto la superficie $H = s - z$:

$$\tau_{xu} = \rho g H \partial h / \partial x$$

oppure, definendo la driving stress alla base ($z = b$, dove $H = h$):

$$\tau_d = \rho g h |\nabla s|$$

lo stress di taglio varia linearmente da zero in superficie a τ_d alla base.

Profilo di Velocità: Derivazione Analitica

Conoscendo il profilo di stress, possiamo determinare il profilo di velocità utilizzando la legge costitutiva di Glen. Nella SIA, il tasso di deformazione di taglio verticale $\dot{\epsilon}_{xu}$ è dato da:

$$\dot{\epsilon}_{xu} = (1/2)(\partial u / \partial z + \partial w / \partial x)$$

Poiché w è piccolo nell'approssimazione SIA (il flusso è quasi orizzontale), il termine dominante è:

$$\dot{\epsilon}_{xu} \approx (1/2) \partial u / \partial z$$

La legge di Glen in forma semplice scalare per questo flusso di taglio semplice diventa:

$$\partial u / \partial z = 2A \tau_{xu}^n$$

Sostituendo l'espressione dello stress:

$$\partial u / \partial z = 2A [\rho g(s-z) \partial s / \partial x]^n$$

Per semplicità, assumiamo topografia basale piatta (b costante), così $\partial s / \partial x = \partial h / \partial x$:

$$\partial u / \partial z = 2A (\rho g \partial h / \partial x)^n (s-z)^n$$

Questa equazione può essere integrata per ottenere il profilo di velocità. Definiamo $z' = s - z$ (profondità sotto la superficie), così $dz = -dz'$, e integriamo dalla base ($z = b$, dove $z' = h$) con condizione di contorno $u(b) = u_b$ (velocità basale, che può essere non nulla per scorrimento basale):

$$u(z) = u_b + \int^h (s-z) 2A (\rho g \partial h / \partial x)^n (z')^n dz'$$

Calcolando l'integrale:

$$u(z) = u_b + 2A (\rho g \partial h / \partial x)^n [z^{n+1} / (n+1)] \square^{n+1} (s-z)$$

$$u(z) = u_b + (2A/(n+1)) (\rho g \partial h / \partial x)^n [(s-z)^{n+1} - h^{n+1}]$$

Per $n = 3$, questa diventa:

$$u(z) = u_b + (A/2) (\rho g \partial h / \partial x)^3 [(s-z)^4 - h^4]$$

La velocità superficiale ($z = s$) è quindi:

$$u_s = u_b - (2A/(n+1)) (\rho g \partial h / \partial x)^n h^{n+1}$$

Il segno negativo viene risolto notando che per flusso discendente, $\partial h / \partial x < 0$ (lo spessore diminuisce nella direzione del flusso), quindi abbiamo:

$$u_s = u_b + (2A/(n+1)) (\rho g)^n |\partial h / \partial x|^{n-1} (\partial h / \partial x) h^{n+1}$$

oppure, in forma vettoriale per il flusso bidimensionale:

$$u_s = u_b + (2A/(n+1)) (\rho g)^n h^{n+1} |\nabla s|^{n-1} \nabla s$$

dove ora si riconosce che è il gradiente della superficie s (non solo di h) a determinare la direzione del flusso.

Questa formula fondamentale mostra che la velocità superficiale è determinata da due contributi:

1. **Velocità basale u_b :** dovuta allo scorrimento del ghiaccio sul letto roccioso (basal sliding)
2. **Velocità da deformazione interna:** proporzionale a h^{n+1} e a $|\nabla s|^n$

La fortissima dipendenza dallo spessore (alla potenza $n+1 = 4$ per $n = 3$) implica che regioni più spesse fluiscono molto più rapidamente, tutto il resto essendo uguale.

Velocità Mediata verticalmente e Flusso del Ghiaccio

Per molte applicazioni, è utile considerare la velocità mediata verticalmente (depth-averaged):

$$\bar{u} = (1/h) \int_0^s u(z) dz$$

Eseguendo l'integrazione del profilo di velocità ottenuto precedentemente:

$$\bar{u} = u_b + (2A/(n+2)) (\rho g)^n h^{n+1} |\nabla s|^{n-1} \nabla s$$

Per $n = 3$:

$$\bar{u} = u_b + (2A/5) (\rho g)^3 h^4 |\nabla s|^2 \nabla s$$

Il flusso di ghiaccio (ice flux), definito come il volume di ghiaccio che attraversa una sezione trasversale per unità di tempo e per unità di larghezza, è dato da:

$$q = h \bar{u} = h u_b + (2A/(n+2)) (\rho g)^n h^{n+2} |\nabla s|^{n-1} \nabla s$$

Questo flusso ha due componenti: il flusso dovuto allo scorrimento basale ($h u_b$) e il flusso dovuto alla deformazione interna. La componente di deformazione mostra una dipendenza ancora più forte dallo spessore: $h^{n+2} = h^5$ per $n = 3$.

Scorrimento Basale: Weertman Sliding Law

La velocità basale u_b non è una condizione al contorno prescritta, ma dipende dalle condizioni alla base della calotta. Quando la base è alla temperatura di fusione (condizione di base "temperata" o "wet"), può esistere un film o sacche di acqua liquida che lubrifica l'interfaccia ghiaccio-roccia, permettendo lo scorrimento.

La teoria classica dello scorrimento basale, sviluppata da Weertman negli anni Cinquanta e Sessanta, considera il ghiaccio che scorre su un letto roccioso rugoso. Il ghiaccio deve deformarsi per aggirare le asperità del letto, e questo processo dissipa energia. La teoria prevede una relazione tra la velocità di scorrimento e lo stress basale:

$$u_b = C \tau_b^m$$

dove C è un coefficiente di scorrimento che dipende dalle proprietà del letto (rugosità, presenza di sedimenti deformabili, pressione dell'acqua), τ_b è lo stress di taglio basale, e m è un esponente tipicamente compreso tra 1 e 3.

Nei modelli più sofisticati, il coefficiente C può dipendere dalla pressione effettiva $N = p_{ice} - p_{water}$ (differenza tra la pressione del ghiaccio e la pressione dell'acqua nei pori), con la forma:

$$u_b = C N^{(-q)} \tau_b^m$$

dove $q > 0$, riflettendo il fatto che maggiore pressione dell'acqua (quindi minore N) facilita lo scorrimento.

La presenza di sedimenti deformabili alla base può alterare radicalmente la dinamica. Se il letto è composto da till (sedimenti glaciali non consolidati), questi possono deformarsi sotto lo stress applicato dal ghiaccio sovrastante, contribuendo significativamente alla velocità basale. In alcuni casi (ad esempio, alcune ice streams antartiche), la maggior parte del movimento può avvenire per deformazione del till piuttosto che per scorrimento del ghiaccio sulla roccia o per deformazione interna del ghiaccio.

Equazione di Evoluzione dello Spessore: Mass Balance

L'equazione di continuità integrata verticalmente fornisce l'evoluzione temporale dello spessore della calotta. Integrando $\nabla \cdot u = 0$ tra la base b e la superficie s , e utilizzando il teorema di Leibniz per scambiare integrazione e derivazione:

$$\partial h / \partial t + \nabla \cdot q = \dot{a} - \dot{m}$$

dove $\dot{a}$ è il tasso di accumulo (snowfall e deposizione), $\dot{m}$ è il tasso di ablazione (melting e sublimazione), e $q = h \bar{u}$ è il flusso di ghiaccio definito precedentemente.

Più esplicitamente:

$$\partial h / \partial t + \nabla \cdot (h \bar{u}) = M$$

dove $M = \dot{a} - \dot{m}$ è il Surface Mass Balance (SMB).

Sostituendo l'espressione per $\bar{u}$ dalla SIA (e assumendo per semplicità $u_b = 0$):

$$\partial h / \partial t - \nabla \cdot [(2A/(n+2)) (\rho g)^n h^{n+2} |\nabla s|^{n-1} \nabla s] = M$$

oppure, ricordando che $s = h + b$:

$$\partial h / \partial t - \nabla \cdot [(2A/(n+2)) (\rho g)^n h^{n+2} |\nabla (h+b)|^{n-1} \nabla (h+b)] = M$$

Questa è un'equazione differenziale alle derivate parziali non lineare del quarto ordine (per $n = 3$) che governa l'evoluzione dello spessore del ghiaccio. È un'equazione di diffusione altamente non lineare, dove il coefficiente di diffusione è proporzionale a h^{n+2} e quindi aumenta drasticamente con lo spessore.

Accumulation e Ablation: Superficie Mass Balance

Il termine M nella equazione di evoluzione rappresenta il bilancio netto di massa alla superficie. L'accumulation $\dot{a}$ è determinata principalmente dalle precipitazioni nevose, che dipendono dalla temperatura atmosferica, dall'umidità, e dai pattern di circolazione atmosferica. In prima approssimazione, può essere parametrizzata come funzione della temperatura e dell'elevazione.

L'ablation $\dot{m}$ include diversi processi:

1. **Fusione superficiale:** nelle regioni dove la temperatura estiva supera 0°C
2. **Runoff:** l'acqua di fusione che non si rigela nel firn
3. **Sublimazione:** passaggio diretto ghiaccio $\rightarrow$ vapore
4. **Calving:** distacco di iceberg ai margini in contatto con l'oceano

La fusione superficiale è spesso parametrizzata usando il metodo dei positive degree-days (PDD):

$$\dot{m}_{\text{melt}} = \text{DDF} \times \text{PDD}$$

dove DDF (degree-day factor) è un coefficiente empirico (tipicamente $3\text{-}8 \text{ mm}/^\circ\text{C}/\text{giorno}$ per il ghiaccio) e PDD è la somma annuale delle temperature medie giornaliere positive.

Modelli più sofisticati utilizzano bilanci energetici alla superficie che considerano la radiazione solare (inclusa l'albedo della superficie), la radiazione infrarossa, i flussi di calore sensibile e latente, e la penetrazione della radiazione nel firn.

Soluzioni Stazionarie: Profilo Parabolico

Per una calotta in stato stazionario ($\partial h/\partial t = 0$) su un letto piatto e orizzontale, con accumulation costante $\dot{a}$ e assumendo che non ci sia ablation all'interno dell'area considerata, la SIA ammette soluzioni analitiche.

Consideriamo una calotta simmetrica unidimensionale (che dipende solo dalla distanza radiale r dal centro). L'equazione di continuità diventa:

$$(1/r) d/dr [r q_r] = \dot{a}$$

dove q_r è il flusso radiale. Integrando da $r = 0$ (dove $q_r = 0$ per simmetria):

$$q_r = (\dot{a} r)/2$$

Dalla SIA (senza scorrimento basale):

$$q_r = -(2A/(n+2)) (\rho g)^n h^{n+2} |dh/dr|^{n-1} (dh/dr)$$

Uguagliando le due espressioni e notando che $dh/dr < 0$ (lo spessore diminuisce verso i margini):

$$(\dot{a} r)/2 = (2A/(n+2)) (\rho g)^n h^{n+2} (dh/dr)^n$$

Questa equazione differenziale ordinaria non lineare può essere risolta per separazione di variabili:

$$h^{n+2} (dh/dr)^n = -[(n+2)/(2 \times 2A)] (\dot{a}/(\rho g)^n) r$$

Integrando dall'edge ($r = L$, dove $h = 0$) al punto r generico:

$$\int_0^h h'^{n+2} dh' = -[(n+2)/(2 \times 2A)]^{1/n} (\dot{a}/(\rho g)^n)^{1/n} (1/n) \int_L^r r'^{1/n} dr'$$

Dopo calcoli:

$$h^{(n+2+n)/n} = \text{costante} \times (L^{(1+1/n)} - r^{(1+1/n)})$$

Ponendo $n = 3$:

$$h^{13/3} \propto (L^{4/3} - r^{4/3})$$

da cui:

$$h(r) \propto (L^{4/3} - r^{4/3})^{3/13}$$

Più semplicemente, si trova che lo spessore centrale h_0 e il raggio L sono legati da:

$$h_0 \propto L^{(n+2)/(2n+2)} \dot{a}^{1/(2n+2)}$$

Per $n = 3$:

$$h_0 \propto L^{5/8} \dot{a}^{1/8}$$

Questo mostra che lo spessore scala con una potenza relativamente piccola dell'accumulation (la radice ottava!) ma cresce con il raggio. La forma della calotta è approssimativamente parabolica, ben verificata osservazionalmente per calotte come quella groenlandese nelle sue regioni centrali.

Grounding Line, Ice Shelves e Marine Ice Sheet Instability

La Grounding Line: Definizione e Importanza

La grounding line rappresenta una delle caratteristiche più critiche e dinamiche dei sistemi glaciali marini, definendo il confine dove il ghiaccio terrestre, appoggiato sul letto roccioso (grounded ice), incontra il ghiaccio galleggiante sull'oceano (floating ice shelf). Questa transizione segna un cambiamento fondamentale nella dinamica del sistema: a monte della grounding line, il flusso è controllato dalle equazioni discusse precedentemente (stress basale, deformazione interna), mentre a valle il ghiaccio galleggia in equilibrio idrostatico e la sua dinamica è governata da un diverso bilancio di forze.

La posizione della grounding line non è fissa ma può migrare in risposta a cambiamenti nel bilancio di massa, nella temperatura oceanica, nel livello del mare, o nella geometria del letto. Questa migrazione ha conseguenze profonde per il contributo delle calotte al livello marino globale: è solo il ghiaccio a monte della grounding line (grounded ice) che, fondendo o accelerando verso l'oceano, contribuisce direttamente all'innalzamento del livello del mare. Il ghiaccio già galleggiante (ice shelf) sta già spostando il proprio peso in acqua e la sua fusione non modifica il livello del mare per il principio di Archimede.

Condizione di Galleggiamento: Equilibrio Idrostatico

La posizione della grounding line è determinata dalla condizione di equilibrio idrostatico. Consideriamo una colonna di ghiaccio di spessore h in un oceano di profondità d (misurata dal livello del mare al bedrock). Per semplicità, assumiamo che la base del ghiaccio sia al di sotto del livello del mare.

Il ghiaccio galleggia quando la spinta di Archimede eguaglia il peso del ghiaccio:

$$\rho_{\text{water}} g h_{\text{submerged}} = \rho_{\text{ice}} g h$$

dove $h_{\text{submerged}}$ è la parte sommersa dello spessore del ghiaccio. Se il ghiaccio galleggia liberamente (senza toccare il fondo), $h_{\text{submerged}}$ è tale che:

$$h_{\text{submerged}} = (\rho_{\text{ice}} / \rho_{\text{water}}) h$$

Tipicamente, $\rho_{\text{ice}} \approx 917 \text{ kg/m}^3$ e $\rho_{\text{water}} \approx 1028 \text{ kg/m}^3$ (acqua marina), quindi:

$$h_{\text{submerged}} \approx 0,89 h$$

Il ghiaccio galleggia con circa l'89% del suo volume sotto l'acqua (ricordando il celebre "iceberg").

Il ghiaccio è a terra (grounded) se lo spessore è tale che la base tocca il bedrock prima di raggiungere il galleggiamento. Se la profondità dell'acqua è d , la condizione critica per il galleggiamento è:

$$h_{\text{submerged}} \leq d$$

Sostituendo:

$$(\rho_{\text{ice}}/\rho_{\text{water}}) h \leq d$$

La grounding line si trova quindi dove:

$$h_{\text{grounding}} = (\rho_{\text{water}}/\rho_{\text{ice}}) d \approx 1,12 d$$

Questo implica che per una data profondità oceanica d , il ghiaccio deve raggiungere uno spessore di circa $1,12 d$ per rimanere a terra. Se lo spessore diminuisce sotto questo valore critico, il ghiaccio si solleva dal letto e inizia a galleggiare.

Ice Shelf: Dinamica del Ghiaccio Galleggiante

A valle della grounding line, il ghiaccio forma una piattaforma galleggiante chiamata ice shelf. Le principali ice shelves dell'Antartica (Ross, Filchner-Ronne, Amery) si estendono per centinaia di chilometri nell'oceano e raggiungono spessori che vanno da oltre 1000 metri vicino alla grounding line a poche centinaia di metri al fronte oceanico.

La dinamica delle ice shelves è significativamente diversa da quella del ghiaccio a terra. Poiché il ghiaccio galleggia, non esiste stress basale (il termine u_b nelle equazioni precedenti viene sostituito da una condizione di stress-free alla base). Il flusso è determinato principalmente dagli stress longitudinali (stretching) che erano stati trascurati nella Shallow Ice Approximation.

L'equazione di equilibrio per una ice shelf, nell'approssimazione di stress longitudinale dominante (Shallow Shelf Approximation, SSA), si riduce a:

$$\nabla \cdot (h v \nabla u) = \rho_{\text{ice}} g h \nabla s$$

dove v è una viscosità effettiva integrata verticalmente che dipende dal tasso di estensione.

Lo spessore di una ice shelf in equilibrio idrostatico è legato all'elevazione della superficie s (sopra il livello del mare) da:

$$s = (1 - \rho_{\text{ice}}/\rho_{\text{water}}) h \approx 0,11 h$$

Quindi solo circa l'11% dello spessore emerge sopra l'acqua.

Il bilancio di massa per l'ice shelf include:

1. **Afflusso dalla grounding line:** ghiaccio che arriva dalle regioni a terra
2. **Accumulo superficiale:** precipitazioni nevose sulla ice shelf
3. **Fusione basale** (basal melting): interazione con l'acqua oceanica calda

4. **Calving:** distacco di iceberg al fronte

La fusione basale è particolarmente importante. L'acqua oceanica relativamente calda (anche se a temperature di pochi gradi sopra il punto di congelamento) può fondere il ghiaccio dalla base della ice shelf a tassi che raggiungono decine di metri all'anno in alcune regioni. Questo processo è accelerato dalla circolazione termoalina nelle cavità sub-ice-shelf, dove l'acqua calda profonda può accedere alle regioni prossime alla grounding line.

Marine Ice Sheet Instability: Teoria Fondamentale

Uno dei problemi più critici nella glaciologia contemporanea riguarda la stabilità delle calotte marine (marine ice sheets), ovvero calotte il cui letto si trova sotto il livello del mare. Circa il 90% della calotta antartica è di questo tipo, rendendo il problema di fondamentale importanza per le proiezioni future del livello marino.

La teoria della Marine Ice Sheet Instability (MISI), proposta originariamente da Weertman nel 1974 e approfondita successivamente da numerosi ricercatori (Schoof, Pattyn, Gudmundsson e altri), identifica una condizione geometrica critica che può portare a ritiri irreversibili della grounding line.

Consideriamo una grounding line su un letto con pendenza retrograda (retrograde slope), ovvero un letto che diventa più profondo procedendo verso l'interno del continente. In coordinate dove x aumenta verso l'interno e $d(x)$ è la profondità dell'oceano:

$$dd/dx > 0 \text{ (pendenza retrograda)}$$

In questa configurazione, supponiamo che una perturbazione (ad esempio, un aumento della fusione basale della ice shelf) causi un assottigliamento del ghiaccio vicino alla grounding line. Per la condizione di galleggiamento $h_{\text{grounding}} = (\rho_{\text{water}}/\rho_{\text{ice}}) d$, un assottigliamento può portare la grounding line a ritirarsi verso l'interno.

Ma se il letto è retrogrado, ritirandosi verso l'interno la grounding line si trova in acque più profonde. Per la condizione di galleggiamento, lo spessore critico per rimanere a terra aumenta:

$$h_{\text{grounding}}(\text{nuovo}) = (\rho_{\text{water}}/\rho_{\text{ice}}) d(\text{nuovo}) > h_{\text{grounding}}(\text{vecchio})$$

Questo crea un meccanismo di feedback positivo: il ritiro porta la grounding line in acque più profonde, il che richiede uno spessore maggiore per rimanere a terra, ma lo spessore sta diminuendo (per l'assottigliamento iniziale), quindi il ritiro accelera ulteriormente.

Flusso attraverso la Grounding Line: Condizione di Schoof

La teoria moderna della MISI è stata raffinata significativamente dal lavoro di Christian Schoof (2007), che ha derivato una condizione al contorno per il flusso attraverso la grounding line basata su un'analisi matematica rigorosa della fisica locale.

Schoof ha dimostrato che il flusso di ghiaccio attraverso la grounding line q_{gl} (per unità di larghezza) è determinato da una relazione che dipende dalle condizioni locali:

$$q_{gl} \propto [(\rho_{ice} g)^n / C]^{1/(m+1)} h_{gl}^{(n+2m+3)/(m+1)}$$

dove C è il coefficiente di sliding, m è l'esponente nella legge di scorrimento basale ($u_b \propto \tau^m$), e h_{gl} è lo spessore alla grounding line.

Per parametri tipici ($n = 3$, $m = 3$):

$$q_{gl} \propto h_{gl}^3$$

Questa relazione mostra che il flusso attraverso la grounding line aumenta fortemente con lo spessore locale. Combinando questa con la condizione di galleggiamento $h_{gl} \propto d$:

$$q_{gl} \propto d^3$$

Su un letto retrogrado (dove d aumenta verso l'interno), il flusso aumenta se la grounding line retrocede. Se questo flusso aumentato non può essere bilanciato da sufficiente accumulo a monte, si verifica un ulteriore assottigliamento e ritiro: l'instabilità.

La condizione di Schoof è cruciale per i modelli numerici: fornisce la condizione al contorno necessaria alla grounding line che permette di determinare univocamente la soluzione del sistema.

Evidenze Osservative: Thwaites e Pine Island Glaciers

Le osservazioni satellitari degli ultimi decenni hanno fornito evidenze drammatiche della MSI in azione. Il Thwaites Glacier nell'Antartica Occidentale è diventato l'emblema di questo fenomeno:

Thwaites Glacier:

- La grounding line sta retrocedendo a tassi di circa 0,6 km/anno (con accelerazioni fino a 1,2 km/anno in alcune regioni)
- Il letto sottostante ha una pronunciata pendenza retrograda, con il bedrock che scende da -600 m al fronte attuale a oltre -2000 m a 100 km verso l'interno
- La velocità del ghiaccio è aumentata da circa 2 km/anno negli anni '90 a oltre 4 km/anno in alcune regioni
- La perdita di massa è stimata in oltre 50 Gt/anno e in accelerazione
- Modelli suggeriscono che potrebbe essere già in fase di "unstoppable retreat"

Pine Island Glacier:

- Ritiro della grounding line di oltre 30 km dal 1992
- Accelerazione della velocità da 2,5 km/anno (1994) a oltre 4 km/anno (2014)
- Assottigliamento fino a 6 metri/anno in alcune regioni
- Perdita di massa circa 40 Gt/anno

Questi glaciers sono particolarmente preoccupanti perché drenano vasti bacini dell'Antarctic Ice Sheet che, se completamente destabilizzati, potrebbero contribuire oltre 3 metri al livello marino globale nel corso di secoli.

Meccanismi di Stabilizzazione e Ice Shelf Buttressing

Non tutte le configurazioni su letto retrogrado sono instabili. Esistono meccanismi che possono stabilizzare o rallentare il ritiro:

1. **Ice shelf buttressing:** Una ice shelf spessa e intatta fornisce una resistenza (back-pressure) al flusso dal continente. Questo effetto di "contrafforte" rallenta il ghiaccio a monte e riduce il flusso attraverso la grounding line. Se la ice shelf viene rimossa (per calving aumentato o per fusione basale intensa), questo supporto viene perso e il ghiaccio accelera.
2. **Pinning points:** Isole o alti fondali che "ancorano" la ice shelf forniscono punti di stabilità. Il contatto laterale tra il ghiaccio e questi ostacoli genera stress che resistono al flusso.
3. **Bed topography:** Dossi (bumps) nel letto roccioso o transizioni da retrograde a prograde slopes possono fornire punti di stabilità temporanea.
4. **Viscous effects:** Il riscaldamento da strain heating vicino alla grounding line può ammorbidire il ghiaccio, ma anche creare una zona di transizione più graduale.

Modellazione Numerica della Grounding Line

La modellazione numerica della migrazione della grounding line è estremamente sfidante per diverse ragioni:

1. **Natura mobile del confine:** La grounding line è una superficie libera che si muove nel tempo. I metodi numerici devono tracciare questa posizione con accuratezza.
2. **Risoluzione richiesta:** Schoof e altri hanno mostrato che la fisica locale alla grounding line richiede risoluzioni dell'ordine di centinaia di metri per catturare correttamente la transizione. Questo è problematico per modelli continentali che tipicamente usano risoluzioni di 1-10 km.
3. **Scelta del modello fisico:** Vicino alla grounding line, né la SIA né la SSA sono strettamente valide. Serve un modello che includa tutti i stress (full Stokes) o almeno gli stress longitudinali e verticali (Blatter-Pattyn o "L1L2" equations).
4. **Discretizzazione:** Metodi a griglia fissa (fixed grid) devono interpolare la posizione della grounding line tra celle, introducendo errori. Metodi moving grid o adaptive mesh refinement (AMR) sono più accurati ma computazionalmente costosi.

Approcci moderni includono:

- **Sub-grid interpolation:** Metodi che interpolano le proprietà alla grounding line all'interno di una cella della griglia usando la topografia sub-griglia.
- **Adaptive mesh refinement:** Raffinamento locale della griglia vicino alla grounding line (usato ad esempio in BISICLES).
- **Finite elements con mesh non strutturate:** Permettono risoluzione molto fine dove necessario (usato in Elmer/Ice, ISSM).
- **Level set methods:** Tracciano la grounding line come un'isosuperficie di una funzione level set.

Proiezioni Future e Incertezze

Le proiezioni del contributo dell'Antartica al livello marino futuro sono dominate dall'incertezza sulla MISI:

Scenari conservativi (senza MISI significativa):

- Contributo 2100: 5-20 cm
- Basato principalmente su increased surface melting in Antartica Peninsula

Scenari con MISI (collasso WAIS parziale):

- Contributo 2100: 30-100 cm
- Collasso di Thwaites e Pine Island, ritiro significativo in Amundsen Sea sector

Scenari estremi (collasso WAIS completo):

- Contributo post-2100: 3-4 metri su secoli-millenni
- Implicherebbe l'intera West Antarctic Ice Sheet

Le principali fonti di incertezza sono:

1. **Fisica della grounding line:** Nonostante i progressi teorici, i processi locali alla grounding line su letti reali (con sedimenti, topografia complessa, cavità basali) sono ancora incompletamente compresi.
2. **Ocean forcing:** L'intrusione di acque calde profonde nelle cavità sub-ice-shelf dipende dalla circolazione oceanica su scala regionale e globale, che nei modelli climatici ha ancora grandi incertezze.
3. **Retroazione clima-calotta:** Cambiamenti nella calotta modificano circolazione oceanica, precipitazioni, temperatura regionale, creando feedback complessi.
4. **Processi di calving:** La fisica del distacco di iceberg non è ben compresa e le parametrizzazioni attuali sono empiriche.
5. **Bed properties:** La distribuzione spaziale delle proprietà del letto (durezza, presenza di till, permeabilità) è conosciuta solo attraverso inversioni geofisiche con

incertezze significative.

Cicli di Milankovitch e Teoria Astronomica delle Ere Glaciali

Introduzione alla Teoria Astronomica del Clima

Le ere glaciali che hanno caratterizzato il Quaternario (gli ultimi 2,6 milioni di anni) rappresentano uno dei fenomeni climatici più spettacolari nella storia della Terra. Vaste calotte di ghiaccio, spesse fino a 3-4 chilometri, hanno ricoperto periodicamente gran parte del Nord America, della Scandinavia e di altre regioni alle alte latitudini, avanzando e ritirando con una ciclicità sorprendentemente regolare. La comprensione di questi cicli glaciali-interglaciali ha richiesto l'integrazione di astronomia, climatologia, glaciologia e paleoclimatologia, culminando nella teoria di Milankovitch, una delle sintesi scientifiche più eleganti del XX secolo.

Milutin Milanković, matematico e ingegnere serbo, propose negli anni Venti e Trenta del secolo scorso che le variazioni cicliche nei parametri orbitali della Terra - la forma dell'orbita terrestre, l'inclinazione dell'asse di rotazione, e la precessione degli equinozi - modulassero la distribuzione stagionale e latitudinale della radiazione solare ricevuta dalla Terra (insolation), e che queste variazioni fossero il pacemaker fondamentale delle ere glaciali.

La teoria di Milanković rimase controversa per decenni, fino a quando, negli anni Settanta, l'analisi spettrale dei record paleoclimatici da sedimenti oceanici rivelò ciclicità con periodi corrispondenti esattamente a quelli previsti dalla teoria astronomica, fornendo una conferma drammatica dell'ipotesi.

I Parametri Orbitali: Eccentricità, Obliquità, Precessione

I tre parametri orbitali che variano nel tempo sono:

1. Eccentricità (e)

L'eccentricità misura quanto l'orbita terrestre si discosta da una circonferenza perfetta. Un'orbita circolare ha $e = 0$, mentre un'ellisse più allungata ha $e > 0$. L'orbita terrestre è approssimativamente ellittica, con il Sole in uno dei due fuochi.

L'eccentricità varia tra circa $e_{\min} \approx 0,000055$ e $e_{\max} \approx 0,0679$, a causa delle perturbazioni gravitazionali degli altri pianeti (principalmente Giove e Saturno). Attualmente (2026), $e \approx 0,0167$, relativamente bassa, rendendo l'orbita quasi circolare.

La variazione dell'eccentricità ha periodicità multiple. Le componenti dominanti sono:

- Ciclo principale: circa 100.000 anni (100 ky)
- Ciclo di modulazione: circa 400.000 anni (400 ky)
- Componenti minori: 95 ky, 125 ky

L'eccentricità influenza la distanza Terra-Sole durante l'anno. Per la seconda legge di Keplero, quando la Terra è più vicina al Sole (perielio), si muove più velocemente, quindi quella parte dell'anno è più breve. Attualmente, il perielio avviene a inizio gennaio, quindi l'inverno dell'emisfero nord è leggermente più breve e più mite (la Terra riceve più radiazione), mentre l'estate è più lunga e più fresca.

L'effetto dell'eccentricità sull'insolation totale annua è molto piccolo (variazioni $< 0,2\%$), ma l'effetto sulla distribuzione stagionale può essere significativo quando combinato con la precessione.

2. Obliquità (ϵ)

L'obliquità è l'angolo tra l'asse di rotazione terrestre e la normale al piano orbitale (eclittica). Questo parametro determina l'intensità delle stagioni: maggiore obliquità significa contrasto stagionale più marcato (estati più calde, inverni più freddi), mentre obliquità minore significa stagioni più moderate.

L'obliquità varia tra circa $22,1^\circ$ e $24,5^\circ$ con un periodo dominante di circa 41.000 anni (41 ky). Il valore attuale (2026) è $\epsilon \approx 23,44^\circ$, in lenta diminuzione.

L'obliquità influenza l'insolation in modo latitudinalmente dipendente:

- Maggiore obliquità $\rightarrow$ maggiore insolation alle alte latitudini in estate
- Minore obliquità $\rightarrow$ minore insolation alle alte latitudini, maggiore ai tropici

La variazione di obliquità tra gli estremi (circa $2,4^\circ$) modifica l'insolation estiva a 65°N di circa 100 W/m^2 ($\sim 20\%$ del valore medio), un effetto molto significativo.

3. Precessione degli Equinozi

La precessione è il lento movimento conico dell'asse di rotazione terrestre, simile al movimento di una trottola. Questo movimento è causato principalmente dall'attrazione gravitazionale della Luna e del Sole sul rigonfiamento equatoriale della Terra.

Il ciclo di precessione ha un periodo di circa 26.000 anni (più precisamente, la precessione astronomica ha periodo ~ 25.772 anni). Tuttavia, per gli effetti climatici è rilevante la precessione climatica, che combina la precessione astronomica con il movimento del perielio (precessione del perielio, con periodo ~ 112.000 anni).

La precessione climatica ha periodicità dominanti:

- 23.000 anni
- 19.000 anni

La precessione determina in quale stagione la Terra è più vicina al Sole. Attualmente, il perielio avviene in gennaio (inverno emisfero nord), ma circa 11.000 anni fa avveniva in luglio (estate emisfero nord). Questo inverte il pattern stagionale della distanza Terra-Sole.

Calcolo dell'Insolation

L'insolation (radiazione solare incidente) a una data latitudine e stagione è determinata dalla combinazione dei tre parametri orbitali. Il calcolo esatto richiede astronomia sferica, ma il risultato può essere espresso in forma chiusa.

L'insolation media giornaliera Q a latitudine φ al giorno dell'anno d è data da:

$$Q(\varphi, d) = (S_0/\pi) (r_0/r)^2 [h_0 \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \sin h_0]$$

dove:

- $S_0 = 1361 \text{ W/m}^2$ è la costante solare (irradianza al top dell'atmosfera alla distanza media Terra-Sole)
- r è la distanza Terra-Sole al giorno d
- r_0 è la distanza media
- δ è la declinazione solare (dipende da obliquità e giorno dell'anno)
- h_0 è l'angolo orario del tramonto (funzione di φ , δ)

Il fattore $(r_0/r)^2$ dipende dall'eccentricità:

$$(r_0/r)^2 \approx 1 + 2e \cos(\lambda - \varpi)$$

dove λ è la longitudine solare e ϖ è la longitudine del perielio (precessione).

La declinazione solare è:

$$\sin \delta = \sin \varepsilon \sin \lambda$$

dove ε è l'obliquità.

L'ipotesi di Milankovitch: Insolation Estiva a 65°N

Milanković calcolò l'insolation per diverse latitudini e stagioni attraverso gli ultimi milioni di anni, usando i parametri orbitali ricostruiti dalla meccanica celeste. La sua intuizione chiave fu che il parametro critico per determinare l'inizio e la fine delle ere glaciali fosse l'**insolation estiva alle alte latitudini dell'emisfero nord**, in particolare a 65°N.

La logica fisica è la seguente:

1. **Accumulo di neve:** Le nevicate invernali sono relativamente indipendenti dall'insolation (le temperature sono comunque sotto zero alle alte latitudini in inverno).
2. **Sopravvivenza estiva:** Il fattore critico è se la neve accumulata in inverno sopravvive all'estate. Se l'estate è fresca (bassa insolation), più neve sopravvive.
3. **Feedback dell'albedo:** La neve sopravvissuta riflette più radiazione solare (albedo alto), mantenendo le temperature più fredde, favorendo ulteriore accumulo → feedback positivo.

4. **Crescita della calotta:** Anno dopo anno, se la neve continua a sopravvivere, si accumula, si compatta in ghiaccio, e forma una calotta glaciale che può crescere fino a dimensioni continentali.
5. **Emisfero Nord critico:** L'emisfero nord ha grandi masse continentali alle latitudini medie-alte (Nord America, Eurasia) dove le calotte possono crescere. L'emisfero sud ha meno terra alle latitudini critiche (l'Antartica è già completamente glacializzata).
6. **Latitudine 65°N:** Questa latitudine fu scelta come rappresentativa delle regioni dove le calotte pleistoceniche si formarono (Canada meridionale, Scandinavia).

Quando l'insolation estiva a 65°N è **bassa**, le condizioni favoriscono la glaciazione. Quando è **alta**, favoriscono la deglaciazione.

I calcoli di Milanković mostrano che l'insolation estiva a 65°N varia di circa 50-100 W/m² tra massimi e minimi su scale temporali di decine di migliaia di anni, variazioni sufficientemente grandi da spiegare le transizioni glaciali-interglaciali.

Combinazione dei Cicli: Beat Frequencies

Un aspetto affascinante della teoria di Milanković è che i tre parametri orbitali variano indipendentemente, e la loro combinazione produce pattern complessi nell'insolation.

La precessione (periodi ~23 ky, ~19 ky) modula l'effetto dell'eccentricità. Quando l'eccentricità è alta, le variazioni stagionali della distanza Terra-Sole sono più ampie, quindi la precessione ha un effetto maggiore. Quando l'eccentricità è bassa (orbita quasi circolare), l'effetto della precessione è attenuato.

Questo crea un fenomeno di modulazione di ampiezza: il segnale di precessione nell'insolation ha un'involuppo che varia con il periodo dell'eccentricità (~100 ky).

Matematicamente, questo può essere visto come un prodotto di funzioni periodiche:

$$\text{Insolation} \propto \dots + A(t) \sin(2\pi t/T_{\text{prec}})$$

dove $A(t) \propto e(t)$ varia con periodo ~100 ky.

Il prodotto di due sinusoidi di frequenze diverse produce frequenze di beat:

$$\sin(\omega_1 t) \times \sin(\omega_2 t) = (1/2)[\cos((\omega_1 - \omega_2)t) - \cos((\omega_1 + \omega_2)t)]$$

Questo genera nuove periodicità che sono somme e differenze delle periodicità fondamentali.

Record Paleoclimatici: Ice Cores e Ocean Sediments

La validazione della teoria di Milanković richiede record paleoclimatici ad alta risoluzione che coprissero almeno diverse centinaia di migliaia di anni. Due tipi di archivi sono stati fondamentali:

Ice Cores (Carote di Ghiaccio)

Le carote estratte dalle calotte polari (Antartica, Groenlandia) forniscono record straordinari del clima passato. Gli strati annuali di neve compattata preservano bolle d'aria intrappolate che contengono campioni dell'atmosfera passata, oltre a polveri, ceneri, isotopi, e altri traccianti climatici.

EPICA Dome C (Antartica):

- Profondità: 3.270 metri
- Età massima: ~800.000 anni
- Risoluzione: decenni-secoli

Vostok (Antartica):

- Profondità: 3.623 metri
- Età massima: ~420.000 anni
- Primo record a mostrare chiaramente 4 cicli glaciali

NEEM, NGRIP (Groenlandia):

- Coprono fino a ~128.000 anni
- Risoluzione molto alta (annuale) per periodi recenti

Le misure chiave includono:

1. **$\delta^{18}\text{O}$ (delta-O-18):** Rapporto isotopico $^{18}\text{O}/^{16}\text{O}$ in acqua e ghiaccio, proxy per temperatura. L'evaporazione preferisce ^{16}O (più leggero), quindi il vapore è impoverito in ^{18}O . Durante periodi freddi, meno ^{18}O raggiunge le regioni polari → $\delta^{18}\text{O}$ più negativo. Variazioni $\delta^{18}\text{O}$ di circa 5-10‰ tra glaciali e interglaciali.
2. **CO_2 :** Concentrazione di anidride carbonica misurata nelle bolle d'aria. Durante glaciali: ~180 ppm; durante interglaciali: ~280 ppm. Attualmente (2026): ~425 ppm, ben oltre i valori naturali degli ultimi 800 ky.
3. **CH_4 (metano):** Varia da ~350 ppb (glaciali) a ~700 ppb (interglaciali).
4. **Polvere:** Concentrazione molto maggiore durante periodi glaciali (atmosfera più secca, maggior trasporto eolico).

Ocean Sediments

I sedimenti oceanici accumulano continuamente materiale che precipita dall'acqua sovrastante: resti di organismi planctonici (foraminiferi, diatomee), polveri, materiale organico. L'analisi di carote sedimentarie fornisce record continui di milioni di anni.

$\delta^{18}\text{O}$ nei foraminiferi: Il rapporto isotopico nei gusci di foraminiferi bentonici riflette sia la temperatura dell'acqua sia il volume globale di ghiaccio (durante glaciali, l'acqua evaporata e immagazzinata nelle calotte è impoverita in ^{18}O , quindi l'oceano diventa arricchito). Questo fornisce un record del volume globale di ghiaccio.

Stacked records: LR04 stack (Lisiecki e Raymo, 2005) combina $\delta^{18}\text{O}$ da 57 siti oceanici globali, coprendo 5 milioni di anni.

Analisi Spettrale: Conferma dei Cicli di Milankovitch

L'analisi spettrale (trasformata di Fourier, periodogramma) dei record paleoclimatici rivela le periodicità dominanti nelle variazioni climatiche. Studi seminali (Hays, Imbrie, Shackleton, 1976) applicarono queste tecniche ai sedimenti oceanici, trovando:

Periodicità identificate:

- ~100 ky (dominante negli ultimi 800 ky)
- ~41 ky (obliquità)
- ~23 ky (precessione)
- ~19 ky (precessione)

Queste periodicità corrispondono esattamente ai periodi previsti dalla teoria astronomica, fornendo una conferma spettacolare.

Tuttavia, emersero anche enigmi:

Il Problema dei 100 ky

Il ciclo di ~100 ky domina i record climatici dell'ultimo milione di anni, ma l'effetto diretto dell'eccentricità sull'insolation totale è molto debole (~0,2%). Come può un forcing così debole produrre la risposta climatica più forte?

Ipotesi proposte:

1. **Modulazione della precessione:** L'eccentricità modula l'ampiezza del segnale di precessione, e il sistema climatico risponde non linearmente.
2. **Resonanza del sistema ghiaccio-clima:** Il sistema calotta-atmosfera-oceano ha un tempo di risposta naturale ~100 ky, quindi risuona a questa frequenza.
3. **Stochastic resonance:** Variabilità climatica interna (noise) amplificata dal debole forcing orbitale.
4. **Threshold behavior:** Il sistema ha soglie critiche che vengono superate con periodicità ~100 ky.
5. **CO₂ feedback:** Le variazioni di CO₂ (legate ai cicli oceanici) forniscono l'amplificazione necessaria.

Nessuna spiegazione è definitiva, e probabilmente multipli meccanismi contribuiscono.

Mid-Pleistocene Transition (MPT)

Prima di ~1,2 milioni di anni fa, i cicli glaciali avevano periodicità dominante ~41 ky (obliquità). Dopo ~800 ky fa, la periodicità dominante divenne ~100 ky. Questa transizione (MPT) non è associata a cambiamenti noti nei parametri orbitali, quindi deve riflettere un cambiamento nel sistema climatico terrestre.

Ipotesi per MPT:

- Diminuzione graduale di CO₂ atmosferico che portò il clima vicino a una soglia
- Erosione progressiva dei regoliti alle alte latitudini, permettendo alle calotte di diventare più spesse e persistenti
- Cambiamenti nella circolazione oceanica
- Accumulo di ghiaccio basale freddo (cold-based ice) che rallentò il ritiro delle calotte

Variabilità a Scala Millenaria: Dansgaard-Oeschger ed Eventi Heinrich

Oltre ai cicli di Milankovitch, i record glaciali rivelano variabilità climatica abrupta su scale di millenni, particolarmente durante periodi glaciali:

Eventi Dansgaard-Oeschger (D-O)

Oscillazioni climatiche abrupte con periodicità ~1.500 anni, identificate nei record groenlandesi. Caratterizzate da:

- Riscaldamento improvviso: 8-16°C in pochi decenni
- Fase calda (interstadiale): 200-2.000 anni
- Raffreddamento graduale seguito da rapido ritorno a condizioni fredde (stadiale)

Meccanismo proposto: Riorganizzazioni della circolazione termoalina atlantica (Atlantic Meridional Overturning Circulation, AMOC).

Eventi Heinrich

Scariche massicce di iceberg dall'ice sheet laurentide (Nord America) nell'Atlantico Nord, con periodicità ~7.000 anni. Lasciarono strati di ice-rafted debris (IRD) nei sedimenti oceanici. Causarono raffreddamenti intensi nell'Atlantico Nord e riorganizzazioni climatiche globali.

Meccanismo: Instabilità interne della calotta laurentide, probabilmente legate all'accumulo di acqua basale e collasso periodico di settori della calotta.

Younger Dryas (12.900-11.700 anni fa)

Il più recente e studiato evento di raffreddamento abrupto. Durante la deglaciazione post-ultimo massimo glaciale, quando il clima stava rapidamente riscaldandosi, si verificò un improvviso ritorno a condizioni quasi-glaciali per circa 1.200 anni, particolarmente intenso nell'Atlantico Nord e in Europa.

Caratteristiche:

- Raffreddamento: 5-10°C in decenni nell'Atlantico Nord

- Riavanzamento di ghiacciai in Scandinavia, Scozia, Alpi
- Aridificazione in molte regioni tropicali e subtropicali

Causa probabile: Scarica massiccia di acqua di fusione dalla calotta laurentide nell'Atlantico Nord (probabilmente attraverso il drenaggio del Lake Agassiz), che perturbò l'AMOC, riducendo il trasporto di calore verso nord.

Questo evento illustra la sensibilità del sistema climatico a perturbazioni della circolazione oceanica e il ruolo critico delle calotte glaciali nel modulare il clima, anche durante fasi di ritiro.

Modellazione Numerica dei Sistemi Glaciali e Proiezioni Future

Modelli del Sistema Climatico: Gerarchia e Complessità

La modellazione numerica delle calotte glaciali e della loro interazione con il sistema climatico richiede l'integrazione di componenti fisiche multiple operanti su scale spaziali e temporali vastamente diverse. La comunità scientifica ha sviluppato una gerarchia di modelli con complessità crescente, ciascuno appropriato per specifiche applicazioni e scale temporali.

Earth System Models of Intermediate Complexity (EMICs)

Gli EMICs rappresentano il sistema Terra con complessità ridotta rispetto ai modelli completi, permettendo simulazioni su scale temporali molto lunghe (decine di migliaia di anni o più), essenziali per studiare i cicli glaciali-interglaciali.

Caratteristiche tipiche degli EMICs:

1. **Atmosfera:** Modelli a bassa risoluzione ($10\text{-}20^\circ$ in latitudine/longitudine) o modelli statistici-dinamici che parametrizzano la circolazione atmosferica piuttosto che risolverla esplicitamente. L'equazione del trasporto di umidità è spesso semplificata.
2. **Oceano:** Risoluzione grossolana ($2\text{-}5^\circ$) con numero ridotto di livelli verticali (10-30). La dinamica oceanica è spesso rappresentata usando equazioni primitive o modelli ancora più semplificati che preservano il trasporto di calore ma semplificano i dettagli della circolazione.
3. **Calotte glaciali:** Modelli bidimensionali o tridimensionali con risoluzione 20-100 km, tipicamente usando la Shallow Ice Approximation. L'accoppiamento atmosfera-calotta avviene attraverso parametrizzazioni per temperatura superficiale e precipitation/ablation.
4. **Biosfera e ciclo del carbonio:** Versioni semplificate dei modelli di vegetazione dinamica e del ciclo del carbonio, essenziali per catturare i feedback CO_2 -clima.

Esempi di EMICs:

- **CLIMBER-2**: Modello statistico-dinamico dell'atmosfera, oceano a tre bacini, vegetazione dinamica, calotte glaciali
- **LOVECLIM**: Versione semplificata del modello ECBilt-CLIO
- **GENIE**: Grid-Enabled Integrated Earth system model

Gli EMICs sono stati fondamentali per esplorare i meccanismi dei cicli glaciali, testare l'effetto dei parametri orbitali, e studiare il ruolo dei feedback (ghiaccio-albedo, vegetazione-albedo, CO₂-clima, circolazione oceanica).

Limiti degli EMICs:

- Risoluzione insufficiente per catturare processi regionali importanti
- Parametrizzazioni grossolane di processi complessi (convezione, precipitazione, feedback nubi)
- Difficoltà nel rappresentare cambiamenti abrupti e instabilità

General Circulation Models (GCMs) e Earth System Models (ESMs)

I GCMs e gli ESMs rappresentano l'altra estremità dello spettro di complessità. Questi modelli risolvono esplicitamente le equazioni primitive della dinamica atmosferica e oceanica su griglie ad alta risoluzione, includendo rappresentazioni sofisticate di processi radiativi, microfisica delle nubi, turbolenza, e altro.

Caratteristiche degli ESMs moderni:

1. **Atmosfera**: Risoluzione orizzontale 0,5-2° (~50-200 km), 30-100 livelli verticali. Risolvono equazioni di Navier-Stokes per fluidi comprimibili su sfera rotante, termodinamica, trasporto di radiazione, microfisica delle nubi, convezione.
2. **Oceano**: Risoluzione 0,25-1° (~25-100 km), 40-70 livelli verticali. Equazioni primitive oceaniche, mixing turbolento, convezione profonda.
3. **Calotte glaciali**: Nei modelli più recenti, ice sheet models tridimensionali accoppiati dinamicamente. Risoluzione 1-10 km nelle regioni critiche (grounding lines, ice streams).
4. **Chimica atmosferica e aerosol**: Cicli di carbonio, azoto, zolfo; interazioni aerosol-nubi-radiazione.
5. **Biosfera terrestre e oceanica**: Vegetazione dinamica, ciclo del carbonio terrestre e oceanico, cicli biogeochimici.

Esempi di ESMs:

- **CESM** (Community Earth System Model, NCAR)
- **UKESM** (UK Earth System Model, Met Office)

- **MPI-ESM** (Max Planck Institute)
- **GISS ModelE** (NASA)

Gli ESMs sono utilizzati per proiezioni climatiche IPCC, rianalisi storiche, e studi di processi su scale da stagionali a secolari. L'accoppiamento completo con ice sheet models dinamici è ancora in fase di sviluppo, data la complessità computazionale.

Costi computazionali: Una simulazione di un secolo con un ESM ad alta risoluzione può richiedere mesi di calcolo su supercomputer con migliaia di processori. Questo limita il numero di simulazioni e scenari che possono essere esplorati.

Ice Sheet Models: Strumenti e Approcci

Equazioni Governanti e Approssimazioni

Come discusso precedentemente, il flusso del ghiaccio è governato dalle equazioni di Stokes:

$$\nabla \cdot \sigma + \rho g = 0 \quad \nabla \cdot u = 0$$

con la legge costitutiva di Glen. La soluzione completa (Full Stokes) richiede la risoluzione di un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali non lineari in tre dimensioni, computazionalmente molto oneroso.

Le approssimazioni utilizzate nei modelli operativi sono:

1. **Shallow Ice Approximation (SIA):** Trascura stress longitudinali. Valida per regioni centrali di calotte con flusso lento e topografia graduale. Computazionalmente efficiente. Non valida per ice streams, ice shelves, grounding lines.
2. **Shallow Shelf Approximation (SSA):** Trascura stress verticali, include stress longitudinali e trasversali (stretching). Appropriata per ice shelves e per ice streams con scorrimento basale dominante.
3. **Hybrid models (SIA+SSA):** Combinano SIA (per deformazione interna) e SSA (per scorrimento basale), sommando le velocità. Approccio pragmatico usato in molti modelli.
4. **Higher-order models** (Blatter-Pattyn, L1L2): Includono termini di stress trascurati nella SIA ma non tutti quelli del Full Stokes. Bilancio tra accuratezza e costo computazionale.
5. **Full Stokes:** Soluzione completa senza approssimazioni cinematiche. Necessaria per regioni con geometria complessa, grounding lines, margini. Computazionalmente intensiva.

Principali Ice Sheet Models

PISM (Parallel Ice Sheet Model):

- Open-source, sviluppato principalmente in Germania e USA
- Hybrid SIA+SSA o Blatter-Pattyn
- Risoluzione adattiva, parallelizzazione efficiente
- Utilizzato per studi paleoclimatici e proiezioni Groenlandia/Antartica

Elmer/Ice:

- Open-source, basato su Elmer (finite element solver)
- Full Stokes o higher-order
- Mesh non strutturata, permette risoluzione molto variabile
- Eccellente per studi di grounding line e processi locali

ISSM (Ice Sheet System Model):

- Sviluppato al JPL/Caltech e UC Irvine
- Full Stokes, higher-order, o SIA
- Finite elements, mesh adattiva
- Forte integrazione con dati osservativi (inversioni)
- Utilizzato per proiezioni Groenlandia e Antartica

CISM (Community Ice Sheet Model):

- Parte di CESM, sviluppato principalmente al NCAR
- Higher-order physics
- Strutturato per accoppiamento con climate models
- Focus su Groenlandia

BISICLES:

- Sviluppato a Lawrence Berkeley Lab
- Adaptive mesh refinement (AMR) molto sofisticato
- Higher-order physics
- Eccellente per grounding line dynamics

SICOPOLIS (Simulation COde for POLythermal Ice Sheets):

- Uno dei modelli più longevi, sviluppato dal ~1990
- SIA, thermomechanically coupled
- Utilizzato per studi paleoclimatici a lungo termine

Risoluzione Spaziale e Temporale

La scelta della risoluzione è un compromesso critico:

Risoluzione spaziale:

- Modelli globali: 5-20 km (calotte intere)
- Modelli regionali: 1-5 km (bacini specifici)

- Studi di grounding line: 100-500 m (regioni critiche)

Le tecniche di adaptive mesh refinement permettono di combinare risoluzione grossolana nelle regioni interne (dove il flusso varia gradualmente) con risoluzione fine (centinaia di metri) nelle zone critiche come grounding lines, shear margins, e regioni di rapido cambiamento topografico.

Risoluzione temporale:

- Time step: da minuti (Full Stokes, fenomeni rapidi) a anni (SIA, simulazioni paleoclimatiche lunghe)
- Tecniche di adaptive time-stepping regolano automaticamente il time step per mantenere stabilità e accuratezza

Dati di Input e Inizializzazione

I modelli richiedono numerosi dati di input:

1. **Topografia del bedrock:** Ottenuta da rilievi radar (radio-echo sounding) che penetrano il ghiaccio. Per l'Antartica, datasets come BEDMAP2 (risoluzione 1 km) e BedMachine Antarctica (500 m). Per la Groenlandia, BedMachine Greenland (150 m).
2. **Spessore del ghiaccio:** Differenza tra superficie (da satellite) e bedrock.
3. **Velocità superficiale:** Da interferometria radar satellitare (InSAR) o feature tracking. Datasets come MEaSUREs per Antartica e Groenlandia, con risoluzioni fino a 100-200 m.
4. **Temperatura superficiale:** Da rianalisi climatiche o modelli regionali.
5. **Surface mass balance:** Precipitazioni, ablazione da modelli climatici regionali (es. RACMO per Groenlandia/Antartica).
6. **Bathymetria oceanica:** Per regioni marine e grounding lines.
7. **Proprietà geotermiche:** Flusso di calore geotermico alla base (molto incerto, stimato da modelli geofisici o inversioni).

Spin-up e inizializzazione: I modelli devono essere inizializzati in uno stato che rappresenti accuratamente le condizioni attuali. Approcci comuni:

- **Spin-up paleoclimatico:** Partendo da uno stato senza ghiaccio o con ghiaccio ridotto, il modello viene forzato con clima ricostruito per decine o centinaia di migliaia di anni fino a raggiungere uno stato vicino a quello osservato.
- **Inversione dei parametri:** Data la velocità osservata, si determina la distribuzione spaziale di parametri poco noti (coefficiente di basal sliding, viscosità effettiva) che

riproduce le osservazioni. Tecniche di data assimilation e controllo ottimale.

- **Nudging:** Forzare artificialmente lo spessore del ghiaccio verso i valori osservati per un periodo iniziale.

Accoppiamento Ice Sheet - Climate System

L'accoppiamento bidirezionale tra calotte glaciali e sistema climatico è fondamentale per simulazioni realistiche:

Calotta → Clima (forcing della calotta sul clima):

1. **Topografia:** Le calotte modificano la circolazione atmosferica. Calotte alte (3-4 km) deflettono le correnti a getto, creano anticicloni persistenti, modificano pattern di precipitazione.
2. **Albedo:** Ghiaccio e neve hanno albedo molto alto ($\sim 0,8-0,9$), riflettendo la maggior parte della radiazione solare incidente. Espansione di ghiaccio → maggiore albedo → raffreddamento (feedback positivo ghiaccio-albedo).
3. **Freshwater flux:** Fusione delle calotte immette acqua dolce negli oceani, modificando salinità, densità, e circolazione oceanica (particolarmente AMOC).
4. **Livello del mare:** Cambiamenti nel volume di ghiaccio modificano il livello marino, con effetti su linee di costa e circolazione oceanica costiera.

Clima → Calotta (forcing climatico sulla calotta):

1. **Surface mass balance:** Temperatura e precipitazioni atmosferiche determinano accumulation e ablation.
2. **Temperatura dell'aria:** Controlla fusione superficiale e temperatura del ghiaccio (attraverso diffusione termica).
3. **Oceano:** Temperatura e salinità oceanica controllano fusione basale delle ice shelves (submarine melting).
4. **Circolazione oceanica:** Determina l'intrusione di acque calde nelle cavità sub-ice-shelf.

Implementazione tecnica:

L'accoppiamento può essere:

- **Asincrono:** Il climate model e l'ice sheet model girano separatamente, scambiando informazioni a intervalli (es. ogni 10-100 anni simulati). Riduce costo computazionale

ma può perdere feedbacks rapidi.

- **Sincrono:** I modelli girano simultaneamente, scambiando informazioni ad ogni time step. Più accurato ma molto più costoso.

Frameworks di accoppiamento come **OASIS** facilitano lo scambio di informazioni tra componenti del sistema Terra.

Trattamento dell'Incertezza: Ensembles e Studi di Sensibilità

Data l'incertezza nei parametri fisici, nelle condizioni iniziali, e nei forcing climatici futuri, le proiezioni singole sono insufficienti. L'approccio moderno utilizza:

Ensemble Simulations

Si eseguono molte simulazioni (decine-centinaia) variando:

- Parametri fisici (n, A, C_sliding, ecc.) entro intervalli plausibili
- Scenari di emissioni future (RCP2.6, RCP4.5, RCP8.5)
- Condizioni iniziali (diverse spin-up o inversioni)
- Modelli climatici di forcing (multi-model ensemble)

L'ensemble fornisce una distribuzione di probabilità dei possibili futuri, permettendo di quantificare l'incertezza.

Ice Sheet MIP (Ice Sheet Model Intercomparison Project): Progetti coordinati (ISMIP6 per Groenlandia e Antartica) dove molti gruppi di modellazione eseguono simulazioni standardizzate con gli stessi forcing. Permette di:

- Identificare robustezza delle proiezioni (accordo tra modelli)
- Identificare outliers e comprenderne le cause
- Quantificare spread dovuto a differenze nei modelli vs. differenze negli scenari

Studi di Sensibilità

Analisi sistematica di come le proiezioni dipendono da specifici parametri o processi. Ad esempio:

- Sensibilità al parametro di basal sliding: quanto cambia il contributo al livello del mare variando C?
- Sensibilità a ocean forcing: effetto di diversi scenari di riscaldamento oceanico
- Sensibilità alla risoluzione spaziale: convergenza con raffinamento della griglia

Tecniche statistiche (Sobol indices, variance decomposition) identificano quali parametri contribuiscono maggiormente all'incertezza totale.

Calibrazione Bayesiana

Approcci Bayesiani usano osservazioni (velocità, spessore, mass balance) per:

1. Stimare distribuzioni di probabilità a posteriori dei parametri
2. Ridurre l'incertezza rispetto a stime a priori
3. Quantificare trade-offs tra parametri

Computazionalmente intensivi (richiedono migliaia di simulazioni), ma sempre più utilizzati con emulatori statistici (surrogate models) che approssimano il modello completo.

Contributi al Livello Marino: Potenziale e Proiezioni

Potenziale di Innalzamento dal Ghiaccio Attuale

Il volume totale di ghiaccio sulla Terra e il suo potenziale contributo al livello marino (Sea Level Equivalent, SLE) è:

Groenlandia:

- Volume: $\sim 2,85 \times 10^6 \text{ km}^3$
- SLE: $\sim 7,4 \text{ m}$
- Area: $\sim 1,71 \times 10^6 \text{ km}^2$
- Spessore medio: $\sim 1,67 \text{ km}$
- Spessore massimo: $\sim 3,2 \text{ km}$

Antartica:

- Volume totale: $\sim 26,5 \times 10^6 \text{ km}^3$
- SLE totale: $\sim 58,3 \text{ m}$
- Suddivisa in:
 - East Antarctic Ice Sheet (EAIS): $\sim 53,3 \text{ m SLE}$ (generalmente stabile)
 - West Antarctic Ice Sheet (WAIS): $\sim 4,3 \text{ m SLE}$ (vulnerabile a MISI)
 - Antarctic Peninsula: $\sim 0,7 \text{ m SLE}$

Altri ghiacciai e calotte minori:

- Alaska, Ande, Alpi, Himalaya, ecc.
- SLE totale: $\sim 0,4 \text{ m}$
- Già in rapido ritiro, contributo significativo nelle prossime decadi

Totale: $\sim 66 \text{ m SLE}$ se tutto il ghiaccio fondesse (scenario puramente ipotetico su scale di millenni).

Proiezioni per il 21° Secolo

Le proiezioni per il 2100 dipendono fortemente dallo scenario di emissioni e dai processi dinamici delle calotte:

Scenario RCP2.6 (mitigazione forte):

- Groenlandia: $0,05\text{-}0,15 \text{ m}$
- Antartica: $-0,02 \text{ a } +0,15 \text{ m}$ (incertezza include possibile aumento per maggiori nevicate)

- Altri ghiacciai: 0,10-0,15 m
- **Totale ice contribution: 0,15-0,40 m**

Scenario RCP4.5 (mitigazione moderata):

- Groenlandia: 0,08-0,20 m
- Antartica: 0,00-0,25 m
- Altri ghiacciai: 0,12-0,18 m
- **Totale ice contribution: 0,20-0,60 m**

Scenario RCP8.5 (business as usual):

- Groenlandia: 0,10-0,30 m
- Antartica: 0,05-0,40 m (alta incertezza da MISI)
- Altri ghiacciai: 0,15-0,20 m
- **Totale ice contribution: 0,30-0,90 m**

Scenari estremi (low probability, high impact): Alcuni studi suggeriscono che processi dinamici rapidi (cliff instability, hydrofracturing) potrebbero portare a contributi antartici fino a 1-2 m entro 2100 in scenari di riscaldamento elevato, ma questo è altamente dibattuto.

Componenti del SLR totale 2100:

- Espansione termica oceanica: 0,15-0,45 m
- Ghiacciai e calotte: 0,15-0,90 m (come sopra)
- Water storage changes (dighe, groundwater): $\pm 0,05$ m
- **Totale proiettato: 0,30-1,40 m** (intervallo molto largo per RCP2.6-8.5)

Oltre il 2100: Impegno a Lungo Termine

Anche se le emissioni cessassero completamente, il sistema climatico ha inerzia significativa:

Impegno termico oceanico: Gli oceani continuano a riscaldarsi per secoli anche con CO₂ stabilizzato, a causa della grande capacità termica e della lenta circolazione oceanica profonda.

Impegno delle calotte: Le calotte rispondono su scale temporali di secoli-millenni. Anche con clima stabilizzato, potrebbero continuare a perdere massa per secoli se portate in uno stato di disequilibrio.

Proiezioni multi-secolari:

- **Groenlandia:** Se il riscaldamento regionale supera $\sim 2-3^{\circ}\text{C}$ sopra i livelli pre-industriali (soglia incerta), la calotta potrebbe entrare in un regime di self-sustained melting, dove l'abbassamento della superficie la espone a temperature più alte (lapse rate), accelerando la fusione anche se il clima si stabilizza. Collasso completo su 1.000-10.000 anni $\rightarrow 7,4$ m SLR.

- **West Antarctic Ice Sheet:** Se la MISI si innesca completamente nel settore Amundsen Sea (Thwaites, Pine Island), il collasso potrebbe essere inarrestabile su scale di secoli, contribuendo 3-4 m. Questo potrebbe avvenire con riscaldamento oceanico persistente di 1-2°C nelle acque profonde.
- **East Antarctic Ice Sheet:** Considerata stabile per la maggior parte degli scenari del 21°-22° secolo, ma vulnerabile su scale multi-millennarie con riscaldamenti molto elevati (>5°C). Settori come Wilkes Basin potrebbero essere vulnerabili a MISI.

Impegno già irreversibile: Alcuni studi suggeriscono che anche con le emissioni attuali, potremmo aver già innescato cambiamenti che porteranno a metri di SLR nei prossimi secoli, indipendentemente dalle azioni future. L'inerzia del sistema è tale che gli impatti completi delle emissioni odierne si manifesteranno nel corso di molte generazioni future.

Modellazione Numerica dei Sistemi Glaciali e Proiezioni Future

Modelli del Sistema Climatico: Gerarchia e Complessità

La modellazione numerica delle calotte glaciali e della loro interazione con il sistema climatico richiede l'integrazione di componenti fisiche multiple operanti su scale spaziali e temporali vastamente diverse. La comunità scientifica ha sviluppato una gerarchia di modelli con complessità crescente, ciascuno appropriato per specifiche applicazioni e scale temporali.

Earth System Models of Intermediate Complexity (EMICs)

Gli EMICs rappresentano il sistema Terra con complessità ridotta rispetto ai modelli completi, permettendo simulazioni su scale temporali molto lunghe (decine di migliaia di anni o più), essenziali per studiare i cicli glaciali-interglaciali.

Caratteristiche tipiche degli EMICs:

1. **Atmosfera:** Modelli a bassa risoluzione (10-20° in latitudine/longitudine) o modelli statistici-dinamici che parametrizzano la circolazione atmosferica piuttosto che risolverla esplicitamente. L'equazione del trasporto di umidità è spesso semplificata.
2. **Oceano:** Risoluzione grossolana (2-5°) con numero ridotto di livelli verticali (10-30). La dinamica oceanica è spesso rappresentata usando equazioni primitive o modelli ancora più semplificati che preservano il trasporto di calore ma semplificano i dettagli della circolazione.
3. **Calotte glaciali:** Modelli bidimensionali o tridimensionali con risoluzione 20-100 km, tipicamente usando la Shallow Ice Approximation. L'accoppiamento atmosfera-calotta avviene attraverso parametrizzazioni per temperatura superficiale

e precipitation/ablation.

4. **Biosfera e ciclo del carbonio:** Versioni semplificate dei modelli di vegetazione dinamica e del ciclo del carbonio, essenziali per catturare i feedback CO₂-clima.

Esempi di EMICs:

- **CLIMBER-2:** Modello statistico-dinamico dell'atmosfera, oceano a tre bacini, vegetazione dinamica, calotte glaciali
- **LOVECLIM:** Versione semplificata del modello ECBilt-CLIO
- **GENIE:** Grid-Enabled Integrated Earth system model

Gli EMICs sono stati fondamentali per esplorare i meccanismi dei cicli glaciali, testare l'effetto dei parametri orbitali, e studiare il ruolo dei feedback (ghiaccio-albedo, vegetazione-albedo, CO₂-clima, circolazione oceanica).

Limiti degli EMICs:

- Risoluzione insufficiente per catturare processi regionali importanti
- Parametrizzazioni grossolane di processi complessi (convezione, precipitazione, feedback nubi)
- Difficoltà nel rappresentare cambiamenti abrupti e instabilità

General Circulation Models (GCMs) e Earth System Models (ESMs)

I GCMs e gli ESMs rappresentano l'altra estremità dello spettro di complessità. Questi modelli risolvono esplicitamente le equazioni primitive della dinamica atmosferica e oceanica su griglie ad alta risoluzione, includendo rappresentazioni sofisticate di processi radiativi, microfisica delle nubi, turbolenza, e altro.

Caratteristiche degli ESMs moderni:

1. **Atmosfera:** Risoluzione orizzontale 0,5-2° (~50-200 km), 30-100 livelli verticali. Risolvono equazioni di Navier-Stokes per fluidi comprimibili su sfera rotante, termodinamica, trasporto di radiazione, microfisica delle nubi, convezione.
2. **Oceano:** Risoluzione 0,25-1° (~25-100 km), 40-70 livelli verticali. Equazioni primitive oceaniche, mixing turbolento, convezione profonda.
3. **Calotte glaciali:** Nei modelli più recenti, ice sheet models tridimensionali accoppiati dinamicamente. Risoluzione 1-10 km nelle regioni critiche (grounding lines, ice streams).
4. **Chimica atmosferica e aerosol:** Cicli di carbonio, azoto, zolfo; interazioni aerosol-nubi-radiazione.

5. **Biosfera terrestre e oceanica:** Vegetazione dinamica, ciclo del carbonio terrestre e oceanico, cicli biogeochimici.

Esempi di ESMs:

- **CESM** (Community Earth System Model, NCAR)
- **UKESM** (UK Earth System Model, Met Office)
- **MPI-ESM** (Max Planck Institute)
- **GISS ModelE** (NASA)

Gli ESMs sono utilizzati per proiezioni climatiche IPCC, rianalisi storiche, e studi di processi su scale da stagionali a secolari. L'accoppiamento completo con ice sheet models dinamici è ancora in fase di sviluppo, data la complessità computazionale.

Costi computazionali: Una simulazione di un secolo con un ESM ad alta risoluzione può richiedere mesi di calcolo su supercomputer con migliaia di processori. Questo limita il numero di simulazioni e scenari che possono essere esplorati.

Ice Sheet Models: Strumenti e Approcci

Equazioni Governanti e Approssimazioni

Come discusso precedentemente, il flusso del ghiaccio è governato dalle equazioni di Stokes:

$$\nabla \cdot \sigma + \rho g = 0 \quad \nabla \cdot u = 0$$

con la legge costitutiva di Glen. La soluzione completa (Full Stokes) richiede la risoluzione di un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali non lineari in tre dimensioni, computazionalmente molto oneroso.

Le approssimazioni utilizzate nei modelli operativi sono:

1. **Shallow Ice Approximation (SIA):** Trascura stress longitudinali. Valida per regioni centrali di calotte con flusso lento e topografia graduale. Computazionalmente efficiente. Non valida per ice streams, ice shelves, grounding lines.
2. **Shallow Shelf Approximation (SSA):** Trascura stress verticali, include stress longitudinali e trasversali (stretching). Appropriata per ice shelves e per ice streams con scorrimento basale dominante.
3. **Hybrid models (SIA+SSA):** Combinano SIA (per deformazione interna) e SSA (per scorrimento basale), sommando le velocità. Approccio pragmatico usato in molti modelli.
4. **Higher-order models** (Blatter-Pattyn, L1L2): Includono termini di stress trascurati nella SIA ma non tutti quelli del Full Stokes. Bilancio tra accuratezza e costo

computazionale.

5. **Full Stokes:** Soluzione completa senza approssimazioni cinematiche. Necessaria per regioni con geometria complessa, grounding lines, margini. Computazionalmente intensiva.

Principali Ice Sheet Models

PISM (Parallel Ice Sheet Model):

- Open-source, sviluppato principalmente in Germania e USA
- Hybrid SIA+SSA o Blatter-Pattyn
- Risoluzione adattiva, parallelizzazione efficiente
- Utilizzato per studi paleoclimatici e proiezioni Groenlandia/Antartica

Elmer/Ice:

- Open-source, basato su Elmer (finite element solver)
- Full Stokes o higher-order
- Mesh non strutturata, permette risoluzione molto variabile
- Eccellente per studi di grounding line e processi locali

ISSM (Ice Sheet System Model):

- Sviluppato al JPL/Caltech e UC Irvine
- Full Stokes, higher-order, o SIA
- Finite elements, mesh adattiva
- Forte integrazione con dati osservativi (inversioni)
- Utilizzato per proiezioni Groenlandia e Antartica

CISM (Community Ice Sheet Model):

- Parte di CESM, sviluppato principalmente al NCAR
- Higher-order physics
- Strutturato per accoppiamento con climate models
- Focus su Groenlandia

BISICLES:

- Sviluppato a Lawrence Berkeley Lab
- Adaptive mesh refinement (AMR) molto sofisticato
- Higher-order physics
- Eccellente per grounding line dynamics

SICOPOLIS (Simulation COde for POLythermal Ice Sheets):

- Uno dei modelli più longevi, sviluppato dal ~1990
- SIA, thermomechanically coupled
- Utilizzato per studi paleoclimatici a lungo termine

Risoluzione Spaziale e Temporale

La scelta della risoluzione è un compromesso critico:

Risoluzione spaziale:

- Modelli globali: 5-20 km (calotte intere)
- Modelli regionali: 1-5 km (bacini specifici)
- Studi di grounding line: 100-500 m (regioni critiche)

Le tecniche di adaptive mesh refinement permettono di combinare risoluzione grossolana nelle regioni interne (dove il flusso varia gradualmente) con risoluzione fine (centinaia di metri) nelle zone critiche come grounding lines, shear margins, e regioni di rapido cambiamento topografico.

Risoluzione temporale:

- Time step: da minuti (Full Stokes, fenomeni rapidi) a anni (SIA, simulazioni paleoclimatiche lunghe)
- Tecniche di adaptive time-stepping regolano automaticamente il time step per mantenere stabilità e accuratezza

Dati di Input e Inizializzazione

I modelli richiedono numerosi dati di input:

1. **Topografia del bedrock:** Ottenuta da rilievi radar (radio-echo sounding) che penetrano il ghiaccio. Per l'Antartica, datasets come BEDMAP2 (risoluzione 1 km) e BedMachine Antarctica (500 m). Per la Groenlandia, BedMachine Greenland (150 m).
2. **Spessore del ghiaccio:** Differenza tra superficie (da satellite) e bedrock.
3. **Velocità superficiale:** Da interferometria radar satellitare (InSAR) o feature tracking. Datasets come MEaSUREs per Antartica e Groenlandia, con risoluzioni fino a 100-200 m.
4. **Temperatura superficiale:** Da rianalisi climatiche o modelli regionali.
5. **Surface mass balance:** Precipitazioni, ablazione da modelli climatici regionali (es. RACMO per Groenlandia/Antartica).
6. **Bathymetria oceanica:** Per regioni marine e grounding lines.
7. **Proprietà geotermiche:** Flusso di calore geotermico alla base (molto incerto, stimato da modelli geofisici o inversioni).

Spin-up e inizializzazione: I modelli devono essere inizializzati in uno stato che rappresenti accuratamente le condizioni attuali. Approcci comuni:

- **Spin-up paleoclimatico:** Partendo da uno stato senza ghiaccio o con ghiaccio ridotto, il modello viene forzato con clima ricostruito per decine o centinaia di migliaia di anni fino a raggiungere uno stato vicino a quello osservato.
- **Inversione dei parametri:** Data la velocità osservata, si determina la distribuzione spaziale di parametri poco noti (coefficiente di basal sliding, viscosità effettiva) che riproduce le osservazioni. Tecniche di data assimilation e controllo ottimale.
- **Nudging:** Forzare artificialmente lo spessore del ghiaccio verso i valori osservati per un periodo iniziale.

Accoppiamento Ice Sheet - Climate System

L'accoppiamento bidirezionale tra calotte glaciali e sistema climatico è fondamentale per simulazioni realistiche:

Calotta → Clima (forcing della calotta sul clima):

1. **Topografia:** Le calotte modificano la circolazione atmosferica. Calotte alte (3-4 km) deflettono le correnti a getto, creano anticicloni persistenti, modificano pattern di precipitazione.
2. **Albedo:** Ghiaccio e neve hanno albedo molto alto ($\sim 0,8-0,9$), riflettendo la maggior parte della radiazione solare incidente. Espansione di ghiaccio → maggiore albedo → raffreddamento (feedback positivo ghiaccio-albedo).
3. **Freshwater flux:** Fusione delle calotte immette acqua dolce negli oceani, modificando salinità, densità, e circolazione oceanica (particolarmente AMOC).
4. **Livello del mare:** Cambiamenti nel volume di ghiaccio modificano il livello marino, con effetti su linee di costa e circolazione oceanica costiera.

Clima → Calotta (forcing climatico sulla calotta):

1. **Surface mass balance:** Temperatura e precipitazioni atmosferiche determinano accumulation e ablation.
2. **Temperatura dell'aria:** Controlla fusione superficiale e temperatura del ghiaccio (attraverso diffusione termica).
3. **Oceano:** Temperatura e salinità oceanica controllano fusione basale delle ice shelves (submarine melting).

4. **Circolazione oceanica:** Determina l'intrusione di acque calde nelle cavità sub-ice-shelf.

Implementazione tecnica:

L'accoppiamento può essere:

- **Asincrono:** Il climate model e l'ice sheet model girano separatamente, scambiando informazioni a intervalli (es. ogni 10-100 anni simulati). Riduce costo computazionale ma può perdere feedbacks rapidi.
- **Sincrono:** I modelli girano simultaneamente, scambiando informazioni ad ogni time step. Più accurato ma molto più costoso.

Frameworks di accoppiamento come **OASIS** facilitano lo scambio di informazioni tra componenti del sistema Terra.

Trattamento dell'Incertezza: Ensembles e Studi di Sensibilità

Data l'incertezza nei parametri fisici, nelle condizioni iniziali, e nei forcing climatici futuri, le proiezioni singole sono insufficienti. L'approccio moderno utilizza:

Ensemble Simulations

Si eseguono molte simulazioni (decine-centinaia) variando:

- Parametri fisici (n, A, C_sliding, ecc.) entro intervalli plausibili
- Scenari di emissioni future (RCP2.6, RCP4.5, RCP8.5)
- Condizioni iniziali (diverse spin-up o inversioni)
- Modelli climatici di forcing (multi-model ensemble)

L'ensemble fornisce una distribuzione di probabilità dei possibili futuri, permettendo di quantificare l'incertezza.

Ice Sheet MIP (Ice Sheet Model Intercomparison Project): Progetti coordinati (ISMIP6 per Groenlandia e Antartica) dove molti gruppi di modellazione eseguono simulazioni standardizzate con gli stessi forcing. Permette di:

- Identificare robustezza delle proiezioni (accordo tra modelli)
- Identificare outliers e comprenderne le cause
- Quantificare spread dovuto a differenze nei modelli vs. differenze negli scenari

Studi di Sensibilità

Analisi sistematica di come le proiezioni dipendono da specifici parametri o processi. Ad esempio:

- Sensibilità al parametro di basal sliding: quanto cambia il contributo al livello del mare variando C ?
- Sensibilità a ocean forcing: effetto di diversi scenari di riscaldamento oceanico
- Sensibilità alla risoluzione spaziale: convergenza con raffinamento della griglia

Tecniche statistiche (Sobol indices, variance decomposition) identificano quali parametri contribuiscono maggiormente all'incertezza totale.

Calibrazione Bayesiana

Approcci Bayesiani usano osservazioni (velocità, spessore, mass balance) per:

1. Stimare distribuzioni di probabilità a posteriori dei parametri
2. Ridurre l'incertezza rispetto a stime a priori
3. Quantificare trade-offs tra parametri

Computazionalmente intensivi (richiedono migliaia di simulazioni), ma sempre più utilizzati con emulatori statistici (surrogate models) che approssimano il modello completo.

Contributi al Livello Marino: Potenziale e Proiezioni

Potenziale di Innalzamento dal Ghiaccio Attuale

Il volume totale di ghiaccio sulla Terra e il suo potenziale contributo al livello marino (Sea Level Equivalent, SLE) è:

Groenlandia:

- Volume: $\sim 2,85 \times 10^6 \text{ km}^3$
- SLE: $\sim 7,4 \text{ m}$
- Area: $\sim 1,71 \times 10^6 \text{ km}^2$
- Spessore medio: $\sim 1,67 \text{ km}$
- Spessore massimo: $\sim 3,2 \text{ km}$

Antartica:

- Volume totale: $\sim 26,5 \times 10^6 \text{ km}^3$
- SLE totale: $\sim 58,3 \text{ m}$
- Suddivisa in:
 - East Antarctic Ice Sheet (EAIS): $\sim 53,3 \text{ m SLE}$ (generalmente stabile)
 - West Antarctic Ice Sheet (WAIS): $\sim 4,3 \text{ m SLE}$ (vulnerabile a MISI)
 - Antarctic Peninsula: $\sim 0,7 \text{ m SLE}$

Altri ghiacciai e calotte minori:

- Alaska, Ande, Alpi, Himalaya, ecc.
- SLE totale: $\sim 0,4 \text{ m}$
- Già in rapido ritiro, contributo significativo nelle prossime decadi

Totale: ~66 m SLE se tutto il ghiaccio fondesse (scenario puramente ipotetico su scale di millenni).

Proiezioni per il 21° Secolo

Le proiezioni per il 2100 dipendono fortemente dallo scenario di emissioni e dai processi dinamici delle calotte:

Scenario RCP2.6 (mitigazione forte):

- Groenlandia: 0,05-0,15 m
- Antartica: -0,02 a +0,15 m (incertezza include possibile aumento per maggiori nevicate)
- Altri ghiacciai: 0,10-0,15 m
- **Totale ice contribution: 0,15-0,40 m**

Scenario RCP4.5 (mitigazione moderata):

- Groenlandia: 0,08-0,20 m
- Antartica: 0,00-0,25 m
- Altri ghiacciai: 0,12-0,18 m
- **Totale ice contribution: 0,20-0,60 m**

Scenario RCP8.5 (business as usual):

- Groenlandia: 0,10-0,30 m
- Antartica: 0,05-0,40 m (alta incertezza da MISI)
- Altri ghiacciai: 0,15-0,20 m
- **Totale ice contribution: 0,30-0,90 m**

Scenari estremi (low probability, high impact): Alcuni studi suggeriscono che processi dinamici rapidi (cliff instability, hydrofracturing) potrebbero portare a contributi antartici fino a 1-2 m entro 2100 in scenari di riscaldamento elevato, ma questo è altamente dibattuto.

Componenti del SLR totale 2100:

- Espansione termica oceanica: 0,15-0,45 m
- Ghiacciai e calotte: 0,15-0,90 m (come sopra)
- Water storage changes (dighe, groundwater): $\pm 0,05$ m
- **Totale proiettato: 0,30-1,40 m** (intervallo molto largo per RCP2.6-8.5)

Oltre il 2100: Impegno a Lungo Termine

Anche se le emissioni cessassero completamente, il sistema climatico ha inerzia significativa:

Impegno termico oceanico: Gli oceani continuano a riscaldarsi per secoli anche con CO₂ stabilizzato, a causa della grande capacità termica e della lenta circolazione oceanica profonda.

Impegno delle calotte: Le calotte rispondono su scale temporali di secoli-millenni. Anche con clima stabilizzato, potrebbero continuare a perdere massa per secoli se portate in uno stato di disequilibrio.

Proiezioni multi-secolari:

- **Groenlandia:** Se il riscaldamento regionale supera $\sim 2-3^{\circ}\text{C}$ sopra i livelli pre-industriali (soglia incerta), la calotta potrebbe entrare in un regime di self-sustained melting, dove l'abbassamento della superficie la espone a temperature più alte (lapse rate), accelerando la fusione anche se il clima si stabilizza. Collasso completo su 1.000-10.000 anni $\rightarrow 7,4$ m SLR.
- **West Antarctic Ice Sheet:** Se la MISI si innesca completamente nel settore Amundsen Sea (Thwaites, Pine Island), il collasso potrebbe essere inarrestabile su scale di secoli, contribuendo 3-4 m. Questo potrebbe avvenire con riscaldamento oceanico persistente di $1-2^{\circ}\text{C}$ nelle acque profonde.
- **East Antarctic Ice Sheet:** Considerata stabile per la maggior parte degli scenari del 21°-22° secolo, ma vulnerabile su scale multi-millenarie con riscaldamenti molto elevati ($>5^{\circ}\text{C}$). Settori come Wilkes Basin potrebbero essere vulnerabili a MISI.

Impegno già irreversibile: Alcuni studi suggeriscono che anche con le emissioni attuali, potremmo aver già innescato cambiamenti che porteranno a metri di SLR nei prossimi secoli, indipendentemente dalle azioni future. L'inerzia del sistema è tale che gli impatti completi delle emissioni odierne si manifesteranno nel corso di molte generazioni future.